

# Studienvorbereitung Mathematik

an der Jade Hochschule – Wilhelmshaven Oldenburg Elsfleth  
(Standort Oldenburg)

## Teil A

Mengen und ihre verschiedenen Darstellungen

Elementare Umformungsregeln zum Lösen von Gleichungen

Potenz- und Wurzelrechnung,  
Exponentialgleichungen und Logarithmen  
Trigonometrie

Text: Axel Kleinschmidt und Lonie Mattfeldt  
Überarbeitung: Karin Benecke und Axel Kleinschmidt

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>Lernziele zum Kapitel 0</b>	<b>3</b>
<b>0 Mengen und ihre verschiedenen Darstellungen</b>	<b>5</b>
<b>Lernziele zum Kapitel 1</b>	<b>15</b>
<b>1 Elementare Umformungsregeln zum Lösen von Gleichungen</b>	<b>17</b>
1.1 Rechengesetze und Binomische Formeln . . . . .	21
1.2 Bruchrechnung . . . . .	27
1.3 Quadratische Gleichungen . . . . .	31
1.4 Rechnen mit Beträgen . . . . .	46
1.5 Lösen von Ungleichungen . . . . .	48
<b>Lernziele zum Kapitel 2</b>	<b>55</b>
<b>2 Potenz- und Wurzelrechnung, Exponentialgleichungen und Logarithmen, Trigonometrie</b>	<b>57</b>
2.1 Potenz- und Wurzelrechnung . . . . .	57
2.2 Exponentialgleichungen . . . . .	61
2.3 Logarithmen . . . . .	64
2.4 Lösen von Exponentialgleichungen . . . . .	67
2.5 Trigonometrie . . . . .	69
<b>Lösungen der Übungsaufgaben</b>	<b>79</b>

© 2010 Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, Center für Lebenslanges Lernen (C3L) (Hrsg.),  
Postfach 2503, 26111 Oldenburg.

Nachdruck und Vervielfältigung nur mit ausdrücklicher Zustimmung des Herausgebers.

Dieser Lehrtext ist Bestandteil des Studienvorbereitungskurses für Studienanfängerinnen und -anfänger der Jade Hochschule, Standort Oldenburg. Er entstand in Zusammenarbeit mit den Fachbereichen Elektrotechnik, Informatik, Maschinenbau und Naturwissenschaftliche Technik sowie dem Weiterbildungsbeauftragten der FHOOW. Der Herausgeber und die AutorInnen danken den beteiligten Professoren der FHOOW für die zahlreichen wertvollen Hinweise, die maßgeblich zur Weiterentwicklung des Materials beigetragen haben.

Überarbeitung: Lutz P. Aderhold, April 2004 und Mario A. Gollub, Juni 2010

## Einführung

Liebe Kursteilnehmerin, lieber Kursteilnehmer,

hiermit begrüßen wir Sie herzlich zu dem vorliegenden Studienvorbereitungskurs in Mathematik.

Erfahrungsgemäß sind die meisten Studienanfängerinnen und Studienanfänger vom geforderten mathematischen Eingangsniveau überrascht. Nicht nur in den Mathematikvorlesungen, sondern gerade auch in einem wirtschaftswissenschaftlichen Studium werden mathematische Grundlagen benötigt, die Bestandteil der Lehrpläne sowohl der Fachoberschulen als auch der Gymnasien sind. In der Praxis sind diese Kenntnisse jedoch oft nicht (mehr) bzw. nur lückenhaft vorhanden. Die Folge sind dann erhebliche Startprobleme oder gar der Abbruch des Studiums.

### Ziel des Kurses

Mit dem vorliegenden Kurs wollen wir Ihnen die Möglichkeit eröffnen, Ihre Kenntnisse aus der Schulmathematik aufzufrischen und evtl. vorhandene Lücken zu schließen. Daher möchten wir Ihnen einerseits einen Eindruck davon verschaffen, über welche Kenntnisse Sie zu Studienbeginn verfügen sollten; andererseits bieten wir Ihnen den vorliegenden Text als Grundlage an, diese Kenntnisse zu erarbeiten. Doch: Auf welche Weise Sie sich das Wissen aneignen, ist völlig unerheblich. Kein Text ist für alle Leserinnen und Leser gleich gut geeignet. Natürlich freuen wir uns, wenn Ihnen unsere Art der Darstellung gefällt; wenn Sie aber lieber auf Ihr altes Schulbuch zurückgreifen, andere Literatur heranziehen, Bekannte fragen, o. a., dann ist das selbstverständlich genauso gut.

### Aufbau des Kurses

Dieser Kurs besteht aus einem Lehrtext, der sich aus fünf Teilen zusammensetzt:

#### Teil A

0. Mengen und ihre verschiedenen Darstellungen
1. Elementare Umformungsregeln zum Lösen von Gleichungen
2. Potenz- und Wurzelrechnung,  
Exponentialgleichungen und Logarithmen, Trigonometrie

#### Teil B

3. Elementare Funktionen
4. Vektoren und Lineare Gleichungssysteme

Zu Beginn jedes Abschnittes geben wir Ihnen einen kurzen Inhaltsüberblick. Dann werden die eigentlichen mathematischen Inhalte dieses Kurses wie folgt behandelt: Wir stellen die jeweiligen mathematischen Begriffe und Verfahren (in der Regel anhand eines einfachen Anwendungsbeispiels) vor. Der Text enthält zahlreiche Aufgaben, die Ihnen sowohl zur Übung als auch zur Selbstkontrolle dienen. Wie Sie sehen werden, handelt es sich dabei um Aufgaben unterschiedlichen Typs: in einigen wird nur eine Rechentechnik eingeübt, andere verlangen die Übertragung der Verfahren auf andere Situationen, und in manchen Aufgaben werden zusätzliche mathematische Inhalte angesprochen. Nutzen Sie die Gelegenheit, einen „Blick“ für das jeweils adäquate Vorgehen zu entwickeln! Wenn Sie etwa im späteren Studium beispielsweise die Funktion  $f$  mit der Funktionsvorschrift  $\frac{x^2-49}{x+7}$  ableiten sollen, müssen Sie sofort „sehen“, daß dieser Bruch (für  $x \neq -7$ ) zu  $(x-7)$  vereinfacht werden kann, ohne daß Sie auf diese Möglichkeit hingewiesen werden oder lange nachdenken müssen. Zu allen Aufgaben finden Sie Lösungen am Schluß des Heftes (auf den farbigen Seiten).

### **Begleitveranstaltung**

Der Kurs ist als Selbststudienkurs konzipiert; dennoch sind wir der Auffassung, daß Kommunikation ein wichtiger Bestandteil jedes Lernprozesses sein sollte. Wir bieten Ihnen daher Veranstaltungen an, bei denen Fragen zum Stoff geklärt und zusätzliche Aufgaben bearbeitet werden können.

Bevor wir mit dem nächsten Abschnitt beginnen, geben wir zunächst die mit diesem Kapitel angestrebten Lernziele an:

**Lernziele zum Kapitel 0 „Mengen und ihre verschiedenen Darstellungen“**

*Nach dem Bearbeiten dieses Kapitels sollten Sie mit Symbolen aus der Mengenlehre vertraut sein, die eine formal mathematische Ausdrucksweise ermöglichen.*

*Insbesondere sollen Sie*

- *die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten einer Menge kennen: die aufzählende, die beschreibende und die zeichnerische Darstellung,*
- *die Vereinigungsmenge, die Schnittmenge und die Differenzmenge (bezüglich zweier und dreier Mengen) im Mengendiagramm veranschaulichen können, diese Mengen in der formalen mathematischen Schreibweise angeben und bestimmen können und*
- *die Begriffe Teilmenge und leere Menge wie die Bezeichnungen der wichtigsten Zahlenmengen (Menge der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen) und die Beschreibung von Mengen durch Intervalle (abgeschlossenes, offenes und halboffenes Intervall) kennen und die entsprechenden Symbole angeben können.*

## 0 Mengen und ihre verschiedenen Darstellungen

*In diesem Kapitel lernen Sie verschiedene Möglichkeiten kennen, Mengen darzustellen. Diese sind die aufzählende Darstellung, die zeichnerische Darstellung in Diagrammen, die beschreibende Darstellung, die Darstellung mit Hilfe von Mengen und die Intervalldarstellung.*

### Beispiel:

Im folgenden Kapitel (1.2 Bruchrechnung) behandeln wir unter anderem Bruchrechnung. In einer Aufgabe (Aufgabe 20) soll der Bruch  $\frac{156}{234}$  so weit wie möglich gekürzt werden.

### Lösung:

Zu diesem Zweck ist der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 156 und 234 zu ermitteln.

Zunächst betrachten wir die Teiler von 156. Es sind: 1, 2, 3, 4, 6, 12, 13, 26, 39, 52, 78 und 156.

Zur Darstellung von „kleinen Mengen“ wie dieser bietet sich die sogenannte aufzählende Darstellung an. Die Menge der Teiler von 156 kann z. B. wie folgt aufgeschrieben werden:

$\{ 1, 2, 3, 4, 6, 12, 13, 26, 39, 52, 78, 156 \}$   
 (gelesen: Mengenklammer auf eins zwei drei vier sechs zwölf dreizehn sechszwanzig neununddreißig zweiundfünfzig sechsundsiebzig hundertsechszwanzig Mengenklammer zu)

aufzählende  
Darstellung

Zwischen zwei geschweiften Klammern („Mengenklammern“) wird also aufgeführt, wer zu der Menge gehört, oder, wie man auch sagt, was die Elemente der Menge sind.

{ , }  
Element

So ist also z. B. 3 ein Element der Menge der Teiler von 156.

Um Platz zu sparen, werden wir jetzt noch einige abkürzende Schreibweisen vereinbaren. Es ist üblich, Mengen mit großen Buchstaben zu bezeichnen. Wenn wir z. B. für die Menge der Teiler von 156 den naheliegenden und gebräuchlichen Buchstaben  $T$  wählen, können wir festlegen:

$$T = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 12, 13, 26, 39, 52, 78, 156 \}.$$

Als weitere Abkürzung werden wir im folgenden die Formulierung „ist ein Element von“ durch das Symbol „ $\in$ “ ersetzen. Mit

$\in$

$$3 \in T$$

(gelesen: Drei ist Element von T)

ist also gemeint, daß 3 zur Menge der Teiler von 156 gehört.

Auch der Fall, daß jemand oder etwas nicht zu einer Menge gehört, läßt sich mit einem Symbol ausdrücken:

∉

$$5 \notin T$$

(gelesen: Fünf ist nicht Element von T)

besagt, daß 5 nicht zur Menge der Teiler von 156 gehört.

beschreibende  
Darstellung

Nun ist die aufzählende Darstellung für die Mengen, um die es in der Mathematik geht (nämlich zum Beispiel die Menge aller Vielfachen von 7 oder die Menge der rationalen Zahlen), offenbar entschieden zu aufwendig bzw. auch überhaupt nicht möglich. Bei solch großen Mengen ist es günstiger, auf die sogenannte beschreibende Darstellung zurückzugreifen, d. h. die Menge durch die Angabe von Eigenschaften der Elemente festzulegen:

Für eine Festlegung der Menge aller Teiler von 156 liegt die folgende mathematisch formale Schreibweise nahe:

$$\{ x \mid x \text{ ist Teiler von } 156 \}$$

(gelesen: Die Menge aller  $x$ , für die gilt  
 $x$  ist Teiler von 156)

|  
Variable

Zwischen den beiden Mengenklammern werden die Elemente der Menge hier nicht einzeln aufgeführt; stellvertretend für alle Elemente wird ein Platzhalter ( $x$ ), i.a. als Variable bezeichnet, verwendet. Der senkrechte Strich (|) hinter der Variablen symbolisiert den Beginn der „Beschreibung“ der Elemente.

zeichnerische  
Darstellung  
Mengendiagramm

Abschließend wollen wir noch darauf hinweisen, daß man Mengen auch zeichnerisch darstellen kann, nämlich mit Hilfe von Mengendiagrammen. So kann man z. B. die Menge  $T$  zeichnerisch darstellen, indem man einen Kreis, ein Ei o. ä. zeichnet und die einzelnen Elemente hineinschreibt:

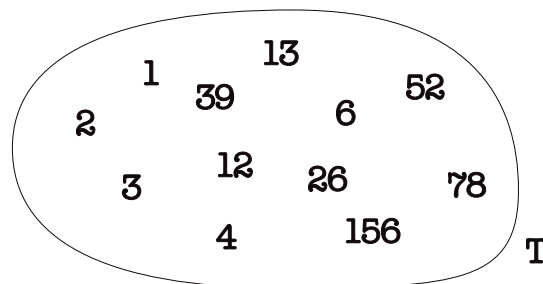


Abb.1.1 Mengendiagramm

Durch eine solche Darstellung hat man aber nichts gewonnen und viel Platz verloren. Nützlich wird die Verwendung von Mengendiagrammen erst, wenn man mindestens zwei Mengen in einer Zeichnung veranschaulichen will. Wir wenden uns wieder unserem eingangs dargestellten Beispiel zu:

Wir betrachten nun auch die Teiler von 234. Es sind: 1, 2, 3, 6, 9, 13, 18, 26, 39, 78, 117 und 234.

Um die genannten beiden Teilmengen nun leicht voneinander unterscheiden zu können, bezeichnen wir diese mit der folgenden üblichen Symbolik:

$$T_{234} = \{ 1, 2, 3, 6, 9, 13, 18, 26, 39, 78, 117, 234 \},$$

$$T_{156} = \{ 1, 2, 3, 4, 6, 12, 13, 26, 39, 52, 78, 156 \}.$$

Jetzt können wir die Mengen  $T_{156}$  und  $T_{234}$  in einer gemeinsamen Zeichnung darstellen:

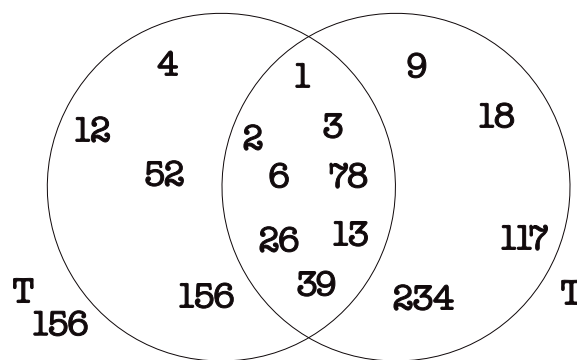


Abb.1.2 Diagramm zweier Mengen

Es ist jetzt recht anschaulich, wie sich die beiden Mengen überlappen. Im folgenden werden Sie erfahren, wie nützlich Mengendiagramme zur Veranschaulichung beim „Rechnen mit Mengen“ sind.

### Aufgabe 1

Welche der folgenden Behauptungen sind wahr?

- a)  $1 \in T_{156}$ ,
- b)  $12 \in T_{234}$ ,
- c)  $14 \notin T_{156}$ ,
- d)  $26 \notin T_{234}$ .



Für die Lösung der zu Beginn dieses Kapitels gestellten Aufgabe sind ja die gemeinsamen Teiler von 156 und 234 zu betrachten.

Dazu verwenden wir das in Abb.1.2 dargestellte „Diagramm zweier Mengen“ und heben das entsprechende Segment hervor. Die durch diesen schraffierten Bereich dargestellte Menge wird als Schnittmenge von  $T_{156}$  und  $T_{234}$  oder „ $T_{156} \cap T_{234}$ “ (gelesen: Teilmenge von 156 geschnitten Teilmenge von 234) bezeichnet. Zur Schnittmenge gehören also alle Elemente, die sowohl zu  $T_{156}$  als auch zu  $T_{234}$  gehören, d. h. alle Zahlen, die sowohl Teiler von 156 als auch Teiler von 234 sind.

Schnittmenge  
 $\cap$

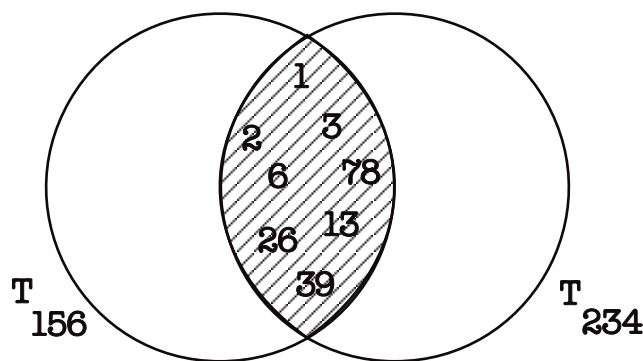


Abb.1.3 Schnittmenge der Mengen  $T_{156}$  und  $T_{234}$

Mathematisch formal läßt sich schreiben:

$$T_{156} \cap T_{234} = \{1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78\}$$

Der größte gemeinsame Teiler läßt sich nun ablesen:  $\text{ggT}(156, 234) = 78$

Damit ist das eingangs gestellte Problem glöst.

Um den angesprochenen Sachverhalt mathematisch vollständig zu beschreiben, fehlen jetzt nur noch die beiden wichtigen Begriffe „Vereinigungsmenge“ und „Differenzmenge“, die wir im folgenden ebenfalls klären wollen.

Die Menge der Teiler von 156 oder 234 entspricht offenbar dem in der Abbildung 1.4 schraffierten Gebiet.

Diese Menge wird als die Vereinigungsmenge von  $T_{156}$  und  $T_{234}$  oder als „ $T_{156} \cup T_{234}$ “<sup>1</sup> (gelesen: Teilmenge von 156 vereinigt Teilmenge von 234) bezeichnet. Zur Menge  $T_{156} \cup T_{234}$  gehören also alle Elemente, die zu  $T_{156}$  oder zu  $T_{234}$  (oder zu beiden) gehören.

Vereinigungsmenge

$\cup$

<sup>1</sup>Es kann eine nützliche Gedankenstütze sein, wenn Sie dieses Zeichen als einen Topf interpretieren, in den alles hineingeworfen wird.

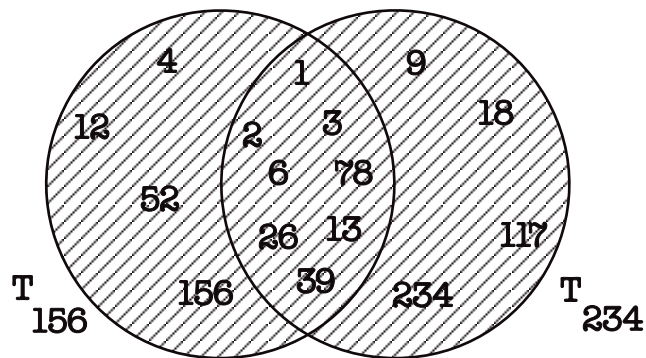


Abb.1.4 Vereinigungsmenge der Mengen  $T_{156}$  und  $T_{234}$

Zur Differenzmenge von  $T_{156}$  und  $T_{234}$  „ $T_{156} \setminus T_{234}$ “ (gelesen: Teilermenge von 156 ohne Teilermenge von 234) gehören alle Elemente

Differenzmenge  
 $\setminus$

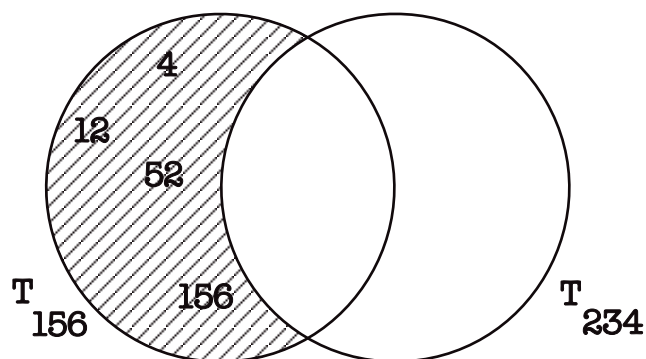


Abb.1.5 Differenzmenge „ $T_{156}$  ohne  $T_{234}$ “

von  $T_{156}$ , die nicht zu  $T_{234}$  gehören, mit anderen Worten: Zu  $T_{156} \setminus T_{234}$  gehören alle Teiler von 156, die nicht Teiler von 234 gehören.

Wenn Sie jetzt die vier folgenden Skizzen noch einmal im Zusammenhang betrachten, können Sie erkennen,

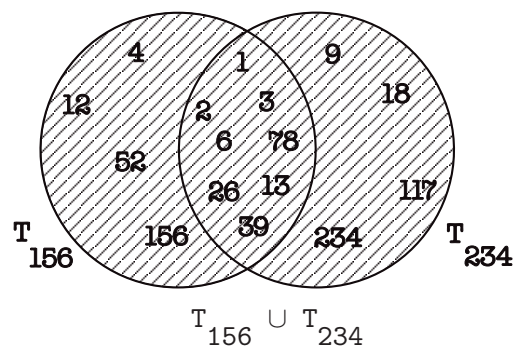
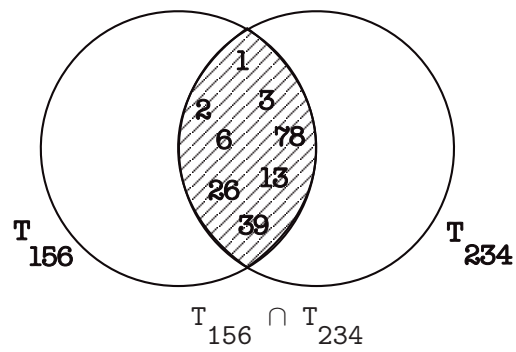
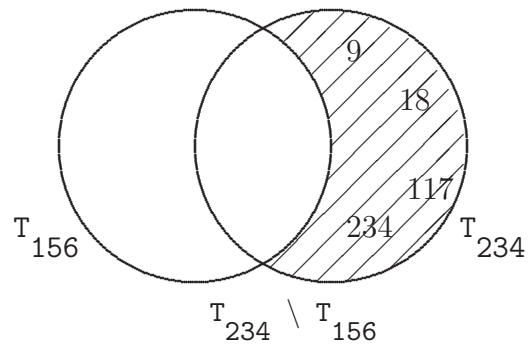
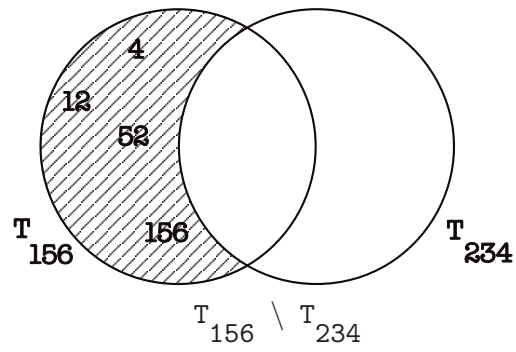


Abb.1.6

daß sich die Menge  $T_{156} \cup T_{234}$  als Vereinigung aus den anderen Mengen zusammensetzen läßt, ohne daß Überschneidungen auftreten.<sup>2</sup>

### Aufgabe 2

Stellen Sie die Teilmengen  $T_{84}$  und  $T_{90}$  in einem Mengendiagramm dar.

### Aufgabe 3

Geben Sie in aufzählender Darstellung an:

- $T_{84} \cap T_{90}$
- $T_{90} \setminus T_{84}$

### Aufgabe 4

Geben Sie in aufzählender Darstellung an (Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Ausdrücke in den Klammern):

- $(T_{84} \cap T_{90}) \setminus \{1, 4, 13\}$
- $(T_{84} \cup T_{90}) \cap \{1, 4, 13\}$
- $T_{90} \cap (T_{84} \cup T_{90})$
- $((T_{84} \setminus T_{90}) \cup (T_{90} \setminus T_{84})) \cap T_{70}$

Damit dieses Kapitel die Funktion erfüllt, eine im Hinblick auf ein wirtschaftswissenschaftliches Studium einigermaßen vollständige Einführung in die Sprache der Mengenlehre zu geben, werden wir jetzt noch die Begriffe „Teilmenge“ und „leere Menge“ einführen. Außerdem haben wir uns bislang auf die Darstellung endlicher Mengen beschränkt. Für die Darstellung von Teilmengen reeller Zahlen lernen Sie die Intervallschreibweise kennen, die sich durch ihre Übersichtlichkeit auszeichnet.

- Eine Menge  $X$  heißt Teilmenge einer Menge  $Y$ , wenn alle Elemente von  $X$  auch zu  $Y$  gehören. So ist z. B. die Menge  $T_{52}$  ( $= \{1, 2, 4, 13, 26, 52\}$ ) offensichtlich eine Teilmenge der Menge  $T_{156}$ :

Teilmenge

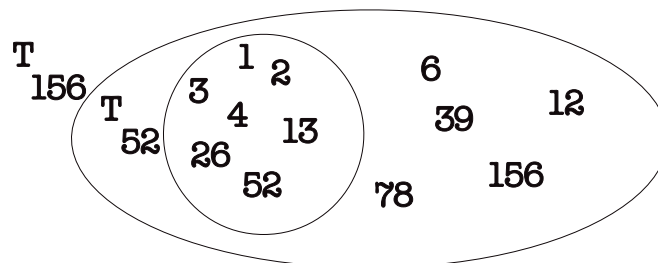


Abb.1.7 Diagramm der Menge  $T_{52}$  und  $T_{156}$

<sup>2</sup>Derartige Mengen werden auch als „paarweise disjunkt“ bezeichnet.

$\subset$  Abkürzend schreibt man auch „ $T_{52} \subset T_{156}$ “ (gelesen: Teilmenge von 52 ist Teilmenge von der Teilmenge von 156).<sup>3</sup>

leere Menge

- Die sogenannte leere Menge ist eine Menge, die gar kein Element enthält. Dies klingt sicher sehr theoretisch und konstruiert, kann aber durchaus praktisch interpretiert werden. Betrachten Sie z. B. die Menge aller geraden Zahlen ( 2 , 4 , 6 , ... ) und Menge der ungeraden Zahlen ( 1 , 3 , 5 , ... ). Offensichtlich ist eine gerade Zahl nicht ungerade und es gibt auch keine ungerade Zahl die gerade ist. Bezeichnen wir die Menge der geraden Zahlen mit  $G$  und die Menge der ungeraden Zahlen mit  $U$ , dann bedeutet dieser Sachverhalt, daß die Menge  $G \cap U$  kein Element enthält, also die leere Menge ist. Man schreibt dafür auch „ $G \cap U = \{\}$ “ oder „ $G \cap U = \emptyset$ “ (gelesen: G geschnitten U ist gleich der leeren Menge).

$\{\}, \emptyset$

- Abschließend wollen wir Ihnen noch eine Reihe von wichtigen Zahlenmengen vorstellen.

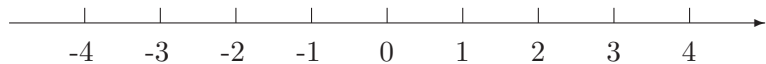
natürliche Zahlen  
N

- Historisch haben sich zunächst die heute sogenannten natürlichen Zahlen entwickelt, also 1, 2, 3, 4 usw.. Für die Menge dieser Zahlen schreibt man abkürzend auch „N“:

$$\mathbb{N} = \{ 1,2,3,4,\dots \} .$$

ganze Zahlen

- Unter ganzen Zahlen versteht man über die natürlichen Zahlen hinaus auch noch die Null sowie die negativen Zahlen -1, -2, -3, -4 usw.. Die ganzen Zahlen lassen sich grafisch darstellen, indem man sie auf einer sogenannten Zahlengeraden anordnet:



$\mathbb{Z}$

Abkürzend schreibt man für die Menge der ganzen Zahlen auch  $\mathbb{Z}$ :

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \} .$$

<sup>3</sup>Übrigens besagt die gerade genannte Festlegung des Begriffes Teilmenge auch, daß jede Menge Teilmenge von sich selbst ist.

- Als rationale Zahlen werden alle Brüche bezeichnet, also alle Zahlen  $\frac{p}{q}$ , wobei  $p$  eine ganze Zahl und  $q$  eine natürliche Zahl (ungleich 0) ist. Für die Menge der rationalen Zahlen schreibt man oft auch „ $\mathbb{Q}$ “. Beachten Sie bitte, daß z. B. auch -2 zu  $\mathbb{Q}$  gehört, da  $-2 = \frac{-2}{1}$  ist.
 

rationale Zahlen  
  
 $\mathbb{Q}$
  
- Zur Menge „ $\mathbb{R}$ “ der reellen Zahlen gehören alle Zahlen, die sich irgendwo auf der Zahlengeraden anordnen lassen, oder anders ausgedrückt:  $\mathbb{R}$  ist die Menge aller Zahlen auf der Zahlengeraden. Auf den ersten Blick sollte man meinen, daß  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{Q}$  identisch sein müßten. Dies ist aber nicht der Fall. Im Anhang 2 finden Sie den Nachweis dafür, daß z. B. die Zahl  $\sqrt{2}$  (die natürlich auf der Zahlengeraden, nämlich irgendwo zwischen 1,4 und 1,5 liegt) nicht als Bruch  $\frac{p}{q}$  dargestellt werden kann, also keine rationale Zahl ist.
 

reelle Zahlen  
 $\mathbb{R}$
  
- Bestimmte Abschnitte auf der Zahlengeraden lassen sich mit Hilfe von sogenannten Intervallen angeben. So wird etwa der Bereich von -1 bis 2 (einschließlich der Zahlen -1 und 2 selbst) als abgeschlossenes Intervall von -1 bis 2 bezeichnet, kurz: „ $[-1,2]$ “. Das Wort „abgeschlossen“ bedeutet dabei, daß die Randpunkte mit zum Intervall gehören.
 

Intervall  
  
abgeschlossenes Intervall  
[ , ]



Wenn man sich nur für den Bereich interessiert, der tatsächlich zwischen den Zahlen -1 und 2 liegt, (wenn also -1 und 2 selbst nicht dazu gehören sollen,) verwendet man statt der eckigen entweder runde oder nach außen offene eckige Klammern und spricht vom offenen Intervall von -1 bis 2: „ $(-1,2)$ “ oder „ $]-1,2[$ “.

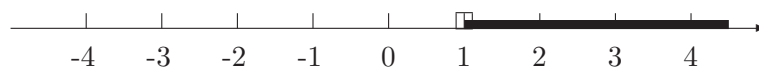
( , )  
] , [  
offenes Intervall

Wenn ein Randpunkt (z. B. 2) zum Intervall gehören soll, der andere (also -1) dagegen nicht, kann man dies mit Hilfe von halboffenen Intervallen ausdrücken: „ $(-1,2]$ “ oder „ $]-1,2]$ “. An der Seite, wo eine eckige Klammer steht, gehört der Randpunkt dazu, an der Seite mit der runden Klammer nicht.

halboffenes Intervall

Man kann sogar „Abschnitte“ der Zahlengeraden als Intervall aufschreiben, die zu keiner Seite ein Ende haben. So bezeichnet  $(1,\infty)$  oder  $]1,\infty[$  (gelesen: das offene Intervall von 1 bis unendlich) die Menge aller Zahlen, die größer als 1 sind.

unendlich  
 $\infty$



Entsprechend schreibt man  $(-\infty, 1)$  oder  $]-\infty, 1[$  (gelesen: das offene Intervall von minus unendlich bis 1) für die Menge aller Zahlen, die kleiner als 1 sind.



### Aufgabe 5

Geben Sie die folgenden Mengen in aufzählender Darstellung an (das Zeichen „ $<$ “ bedeutet „kleiner als“):

- a)  $A_1 = \{x \mid (x \in \mathbb{N}) \wedge (x < 4)\}$   
 b)  $A_2 = \{x \mid (x \in \mathbb{Z}) \wedge (x^2 < 5)\}$   
 c)  $A_3 = \{x \mid (x \in \mathbb{N}) \wedge (3 < x) \wedge (x < 6)\}$   
 d)  $A_4 = \{x \mid (x \in [1, 3]) \wedge (x \in [3, 5])\}$

### Aufgabe 6

Markieren Sie die folgenden Mengen auf einer Zahlengeraden:

- a)  $[0, 2]$ ,  
 b)  $[0, 5] \cap [2, 6]$ ,  
 c)  $[0, 5] \cup [2, 6]$ ,  
 d)  $[0, 6] \setminus [3, 4]$ .

### Aufgabe 7

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- a)  $3 \in \mathbb{Q}$ ,  
 b)  $3 \in [-5, 2]$ ,  
 c)  $3 \in (0, 4)$ ,  
 d)  $3 \in [-1, 3]$ ,  
 e)  $3 \in [-1, 3)$ ,  
 f)  $3 \in (-1, 3]$ ,  
 g)  $3 \in [1, 4] \cap [2, 5]$ ,  
 h)  $3 \in [1, 2] \cap [3, 4]$ ,  
 i)  $3 \in [1, 2] \cup [3, 4]$ ,  
 j)  $3 \in [1, 2] \setminus [3, 4]$ ,  
 k)  $[1, 2] \setminus [3, 4] = \{\}$ ,  
 l)  $[1, 3] \subset [0, 6]$ ,  
 m)  $[2, 3] \subset (2, 5)$ ,  
 n)  $[2, 4] \cap [3, 5] \subset [2, 5]$ .

kleiner als  
<

Bevor wir mit dem nächsten Abschnitt beginnen, geben wir zunächst die mit diesem Kapitel angestrebten Lernziele an:

**Lernziele zum Kapitel 1 „Elementare Umformungsregeln zum Lösen von Gleichungen“**

*Nach dem Bearbeiten des Teils „Elementare Umformungsregeln zum Lösen von Gleichungen“ sollten Sie*

- *die elementaren Regeln zum Umformen von Gleichungen kennen und anwenden können:  
insbesondere die Struktureigenschaften reeller Zahlen (z.B. das Kommutativ- und Assoziativgesetz bezüglich der Addition und Multiplikation, die Distributivgesetze)  
und die Rangfolge bei der Auswertung komplexer Terme (Klammern vor Potenzrechnung vor Punktrechnung vor Strichrechnung),*
- *äquivalenzumformungen kennen und beherrschen,*
- *Regeln der Bruchrechnung (Erweitern, Kürzen, Addieren, Multiplizieren, Dividieren) kennen und beherrschen,*
- *die Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen (quadratische Ergänzung, pq-Formel) kennen und anwenden können,*
- *die Lösungsmenge von linearen bzw. quadratischen Ungleichungen bestimmen können*
- *und Gleichungen bzw. Ungleichungen mit Beträgen lösen können.*



# 1 Elementare Umformungsregeln zum Lösen von Gleichungen

*Gegenstand dieses Kapitels ist die Anwendung elementarer Umformungsregeln beim Lösen von Gleichungen. Zu diesen Regeln zählen u. a. das Kommutativgesetz, das Assoziativgesetz, das Distributivgesetz, die Handhabung von geschachtelten Klammern, die Regeln der Bruchrechnung (Erweitern, Kürzen, Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren von Brüchen) und grundlegendes für das Rechnen mit Beträgen und Ungleichungen. Außerdem wird die Lösung quadratischer Gleichungen behandelt.*

In Ihrem Studium werden Sie sehr selten eine Aufgabe vorfinden, in der Sie eine der für das Lösen von Gleichungen benötigten Techniken isoliert anzuwenden haben; normalerweise werden Sie selbst zur Lösung einfacher Probleme mehrere Regeln kombinieren müssen. Wir demonstrieren dies an einem Beispiel:

Zwei Kugeln werden unter gleichen Bedingungen (d. h. Abwurfort und Wurfgeschwindigkeit sind identisch) - aber zeitlich versetzt - senkrecht nach oben geworfen.

Beispiel

Wann treffen sich die beiden Kugeln?

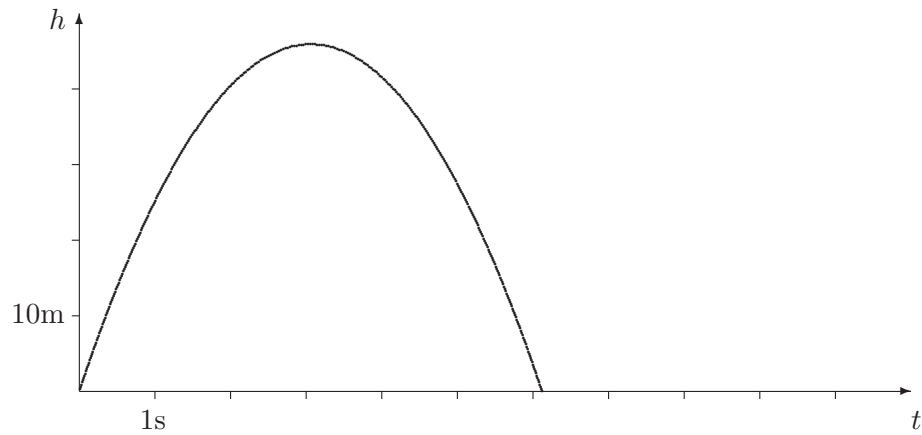
Aus dem Physikunterricht kennen Sie die Formel

$$h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

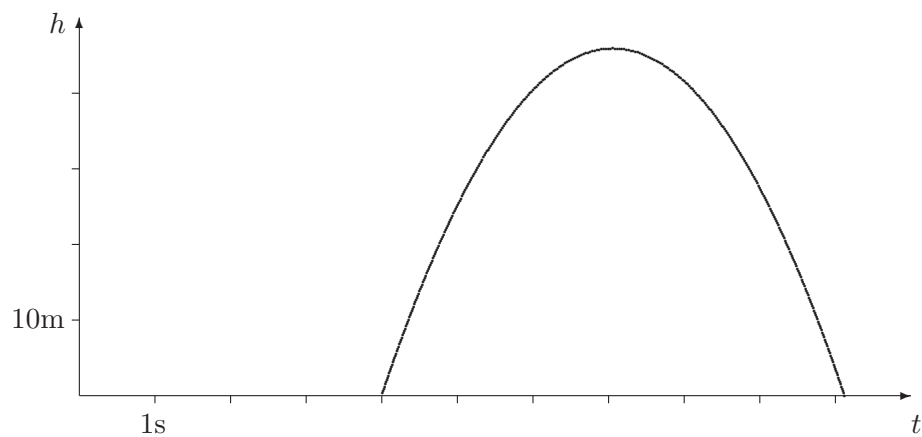
für den senkrechten Wurf. Dabei sind die Abwurfgeschwindigkeit  $v_0$  und die Gravitationsbeschleunigung  $g$  Konstanten; die Variable  $t$  steht für die seit dem Abwurf vergangene Zeit, und die Formel liefert die Höhe  $h$ , in der sich die Kugel zu diesem Zeitpunkt gegenüber der Abwurfhöhe befindet.

In unserem Beispiel werde die Kugel A zum Zeitpunkt  $t = 0$  s mit der Geschwindigkeit  $v_0 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  nach oben geworfen (m steht für Meter, s für Sekunde). Für die Gravitationsbeschleunigung gilt etwa  $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Dann läßt sich der Wurf in einem Koordinatensystem wie folgt darstellen <sup>4</sup>:

<sup>4</sup>Beachten Sie bitte: Die Skizze gibt die Abhängigkeit der Höhe von der Zeit wieder; der Wurf selbst erfolgt senkrecht.



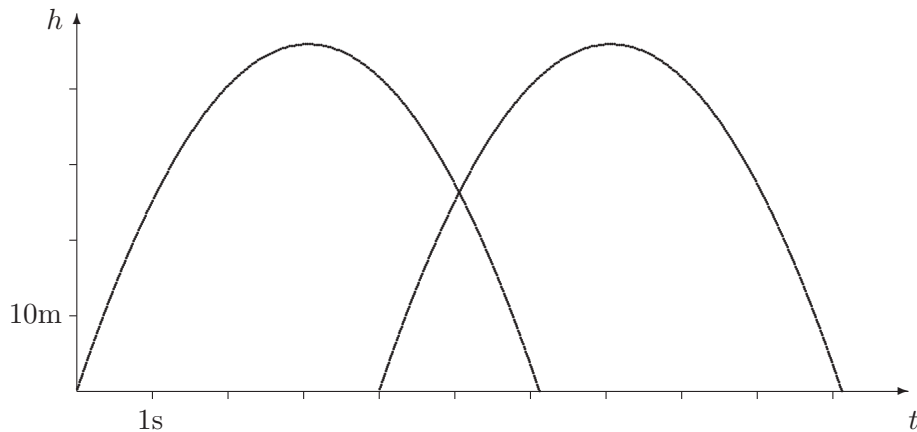
Die Kugel B wird etwas später (zum Zeitpunkt  $t_0 = 4$  s) unter sonst gleichen Bedingungen abgeworfen. Grafisch bedeutet das eine Verschiebung nach rechts:



Rechnerisch erhält man die Höhe der Kugel B aus der Formel für die Kugel A, indem man jeweils die Variable  $t$  durch den Ausdruck  $(t - t_0)$  ersetzt; davon kann man sich durch Einsetzen einiger Werte überzeugen. Es gilt also

$$h_B = v_0 \cdot (t - t_0) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - t_0)^2$$

Veranschaulicht man beide Würfe in einem gemeinsamen Koordinatensystem, so erhält man schon einmal eine anschauliche Lösung des Problems. Wir nehmen dabei an, daß die Kugeln klein sind und ihre Durchmesser vernachlässigt werden können:



Die Kugeln treffen sich also etwa fünf Sekunden nach dem Abwurf der ersten Kugel.

Wir geben uns dennoch mit diesem Ergebnis nicht zufrieden, sondern suchen nach einer rechnerischen Lösung - zum einen aus Gründen der Genauigkeit, zum anderen, weil wir hoffen, eine allgemeinere Aussage ableiten zu können.

Diese rechnerische Lösung (die Durchmesser der Kugeln vernachlässigen wir wieder) erhalten wir aus folgender Überlegung: Die Kugeln treffen sich, wenn Sie sich auf gleicher Höhe befinden, wenn also  $h_A = h_B$  gilt. Der Zeitpunkt, in dem diese Gleichung gilt, wird mit  $t^*$  bezeichnet. Dies entspricht der Bedingung

$$v_0 \cdot t^* - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^{*2} = v_0 \cdot (t^* - t_0) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t^* - t_0)^2$$

Diese Bedingung müssen wir jetzt so umformen, daß wir die Lösung ablesen können. Das heißt, daß  $t^*$  allein und nur noch auf der einen Seite der Gleichung steht. Wir verwenden dazu ausschließlich sogenannte Äquivalenzumformungen<sup>5</sup>, symbolisiert durch das Zeichen  $\Leftrightarrow$ . Bei jedem Schritt markieren wir den zur Umformung anstehenden Teil der Gleichung und notieren, welche Regel bzw. welche Technik benötigt wird:

<sup>5</sup>Unter einer Äquivalenzumformung verstehen wir hier die Ersetzung einer Gleichung G1 durch eine Gleichung G2, die in dem Sinne gleichwertig (äquivalent) sind, daß G1 aus G2 folgt und G2 aus G1 folgt.

$$v_0 \cdot t^* - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^{*2} = \boxed{v_0 \cdot (t^* - t_0)} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t^* - t_0)^2 \quad \text{Ausmultiplizieren}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_0 \cdot t^*} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^{*2} = \boxed{v_0 \cdot t^*} - v_0 \cdot t_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t^* - t_0)^2 \quad \begin{array}{l} \text{Subtraktion von} \\ v_0 \cdot t^* \text{ auf beiden} \\ \text{Seiten} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^{*2} = -v_0 \cdot t_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \boxed{(t^* - t_0)^2} \quad \begin{array}{l} \text{2. Binomische} \\ \text{Formel bzw. Multi-} \\ \text{plikation von Diffe-} \\ \text{renzen} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^{*2} = -v_0 \cdot t_0 - \boxed{\frac{1}{2} \cdot g \cdot (t^{*2} - 2 \cdot t^* \cdot t_0 + t_0^2)} \quad \text{Ausmultiplizieren}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^{*2} = -v_0 \cdot t_0 \boxed{-(\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^{*2} - g \cdot t^* \cdot t_0 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_0^2)} \quad \text{Klammer auflösen}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^{*2}} = -v_0 \cdot t_0 \boxed{-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^{*2}} + g \cdot t^* \cdot t_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_0^2 \quad \begin{array}{l} \text{Addition von } \frac{1}{2} \cdot g \cdot \\ t^{*2} \text{ auf beiden Sei-} \\ \text{ten} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \boxed{-v_0 \cdot t_0 + g \cdot t^* \cdot t_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_0^2} \quad t_0 \text{ ausklammern}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \boxed{t_0} \cdot (-v_0 + g \cdot t^* - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_0) \quad \begin{array}{l} \text{Division durch } t_0 \\ \text{auf beiden Seiten} \\ (t_0 \neq 0) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \boxed{-v_0} + g \cdot t^* \boxed{-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_0} \quad \begin{array}{l} \text{Addition von } v_0 + \\ \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_0 \text{ auf beiden} \\ \text{Seiten} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow v_0 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_0 = \boxed{g} \cdot t^* \quad \begin{array}{l} \text{Division durch } g \\ \text{auf beiden Seiten} \\ (g \neq 0) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_0 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_0}{g} = t^* \quad \text{Bruchrechnung}$$

$$\Leftrightarrow \frac{v_0}{g} + \frac{1}{2} \cdot t_0 = t^*$$

Wir haben eine sehr übersichtliche Formel erhalten, die für geeignete Werte von  $v_0$  und  $t_0$  sofort den Zeitpunkt  $t^*$  liefert, zu dem sich die Kugeln treffen. In unserem Beispiel gilt  $v_0 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $t_0 = 4 \text{ s}$ , so daß

(mit etwas Bruchrechnung) folgt:

$$\begin{aligned}
 t^* &= \frac{v_0}{g} + \frac{1}{2} \cdot t_0 \\
 &= \frac{30 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} + 2 \text{ s} \\
 &= \frac{30}{9,8} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{s}^2}{\text{m}} + 2 \text{ s} \\
 &= \frac{30}{9,8} \text{ s} + 2 \text{ s} \\
 &\approx 5,06 \text{ s}
 \end{aligned}$$

Dabei wurde das Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.

Im folgenden werden wir die verwendeten Techniken isolieren und dazu Übungsaufgaben anbieten. Bitte beachten Sie die folgende Bemerkung zur Schreibweise: Im folgenden werden wir nicht mehr unbedingt jeden Multiplikationspunkt notieren; wie üblich, schreiben wir für ein Produkt „ $a \cdot b$ “ auch abkürzend „ $ab$ “.

Weglassen des Multiplikationspunktes

## 1.1 Rechengesetze und Binomische Formeln

Zur Berechnung eines arithmetischen Ausdrucks wie z. B.

$$3 \cdot 5^2 + 4 + 7 \cdot (x - (x - (x - 1)))^2$$

ist es zunächst einmal wichtig, zu wissen, in welcher Reihenfolge die Ausdrücke ausgewertet werden müssen. Hier gilt die folgende Regel:

Zahlenverkehrsordnung

### Zahlenverkehrsordnung

- §1 Gleichrangige Rechnungen werden von links nach rechts abgearbeitet.
- §2 Es gilt der Grundsatz „Po vo Pu vo Strich“ (Potenzrechnung vor Punktrechnung vor Strichrechnung).
- §3 Sollen Terme abweichend von der durch §§ 1 und 2 geregelten Reihenfolge abgearbeitet werden, müssen Klammern gesetzt werden.

Rechenregeln für reelle Zahlen werden üblicherweise für die Operationen Addition(+) und Multiplikation( $\cdot$ ) angegeben; die Regeln der Subtraktion ergeben sich daraus (wegen  $a - b = a + (-b)$ ), auf die Division gehen wir im Zusammenhang mit der Bruchrechnung ein:

### Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz

- Das **Kommutativgesetz** erlaubt die Vertauschung der Summanden in einer Summe ( $a + b = b + a$ ); das gleiche gilt für die Faktoren in einem Produkt ( $a \cdot b = b \cdot a$ )
- Nach dem **Assoziativgesetz** lassen sich die Summanden einer Summe unterschiedlich zusammenfassen, d. h.  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ; entsprechendes gilt für die Faktoren in einem Produkt:  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Für die Multiplikation einer reellen Zahl mit einer Summe („Ausmultiplizieren“) gilt das **Distributivgesetz**:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Wenn man diese Gleichung von rechts nach links liest, erhält man die Regeln für das „Ausklammern“.

#### Aufgabe 8

Multiplizieren Sie aus:

- a)  $(0,5m + 1, 2n) \cdot 6$
- b)  $16 \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{4}\right)$
- c)  $(x + 3y) \cdot x^2$
- d)  $5p \cdot (2,5p + 7)$
- e)  $(8x + 2xz) \cdot 5x^2$
- f)  $x \cdot (7 + y) + 3 \cdot (x + z) + 5 \cdot (y + z)$

#### Aufgabe 9

Klammern Sie so weit wie möglich aus:

- a)  $7ax + 14bx$
- b)  $6a^2b + 8ab^2$
- c)  $24x^3y^2 + 18x^2y^2$

d)  $39a^2x^2 + 65b^2x + 91x^3$

e)  $0, 14rs + 0, 42r^2 + 0, 28rs^2$

Häufig kommt es zu Fehlern, wenn eine negative Zahl mit einer Summe multipliziert wird oder vor einer Summe ein Minuszeichen steht. Betrachten Sie den Ausdruck

Minus vor  
der Klammer

$$2 \cdot a - 5 \cdot (-3 - a)$$

Hier taucht das Minus-Zeichen in unterschiedlichen Bedeutungen auf: Während das erste Minus-Zeichen als Operationszeichen fungiert, ist das Minus-Zeichen vor der 3 einfach das Vorzeichen der Zahl -3. Formal korrekt können wir den Ausdruck so umformulieren, daß das Minus-Zeichen nicht mehr als Operations-, sondern nur noch als Vorzeichen auftaucht, und dann die genannten Gesetze anwenden <sup>6</sup>:

$$\begin{aligned} & 2 \cdot a - 5 \cdot (-3 - a) \\ = & 2 \cdot a + (-5) \cdot ((-3) + (-a)) && \text{Ausmultiplizieren} \\ = & 2 \cdot a + (-5) \cdot (-3) + (-5) \cdot (-a) \\ = & 2 \cdot a + 15 + 5 \cdot a && \text{Kommutativgesetz, Distributivgesetz} \\ = & 7 \cdot a + 15 \end{aligned}$$

In der Praxis wird man natürlich einen solchen Schreibaufwand vermeiden und stattdessen von der ersten direkt auf die vorletzte Zeile schließen. Es ist aber nützlich, den eben dargestellten Zusammenhang zu kennen, um unnötige Fehler zu vermeiden.

In dem dargestellten Beispiel hätten wir auch wie folgt vorgehen können: Da Punkt- vor Strichrechnung geht, können wir auch zunächst die Zahl 5 mit der Klammer multiplizieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & 2 \cdot a - 5 \cdot (-3 - a) \\ & 2 \cdot a - (-15 - 5a) \end{aligned}$$

und können jetzt die Faustregel „Ein Minus-Zeichen vor der Klammer kehrt die Vorzeichen der Summanden in der Klammer um, wenn man die Klammern wegläßt“, anwenden, die sich formal aus der Umformung

$$\begin{aligned} & 2 \cdot a - (-15 - 5 \cdot a) \\ & 2 \cdot a + (-1) \cdot (-15 - 5 \cdot a) && \text{Distributivgesetz} \\ & 2 \cdot a + (15 + 5 \cdot a) && \text{Assoziativgesetz} \\ & 2 \cdot a + 15 + 5 \cdot a \end{aligned}$$

ergibt.

---

<sup>6</sup>Dabei verwenden wir auch die Regel, daß das Produkt zweier negativer Zahlen positiv ist:  $(-1) \cdot (-1) = (+1)$ . Dagegen ist bekanntlich das Produkt einer negativen mit einer positiven Zahl negativ:  $(-1) \cdot (+1) = (-1)$ .

**Aufgabe 10**

Multiplizieren Sie aus:

- a)  $(-a)(-a + 4c)$
- b)  $3b \cdot (5x - b + 4)$
- c)  $(-3ax)(3c - 3y - 5)$
- d)  $(-ax)(3ax - 3c + 4y)$
- e)  $(-c)(5c - 7a + 4x)$
- f)  $(-2df)(-10eg + 9d + 3de)$

**Aufgabe 11**

Klammern Sie möglichst weit aus:

- a)  $4def - 10e^2f$
- b)  $20d^2ef - 16de^2f$
- c)  $20ef^2 + 5e + 15deg$
- d)  $20c - 25b^2c + 15bc^2$
- e)  $36ab + 6a + 48a^2b^2$
- f)  $60a^2b^2c + 36ac + 84acd^2$

**Aufgabe 12**

Multiplizieren Sie aus:

- a)  $5(x + y + z) - 7(x - y + z) - 8(x + y - z)$
- b)  $25m + (13n - 8z) + (5z + 7m) - (11m + 5n) - (13z - 17n)$
- c)  $69p + [13q - (17p + 11q)] - [11p - (13p - 17q)]$
- d)  $(3a + 5b) - \{11a - [5c - (9b - 8a)] + 13b\}$
- e)  $0,5x \cdot (-1,2ay) - (7ax) \cdot 0,2y + 0,4x \cdot (-4ay)$

**Aufgabe 13**

Klammern Sie aus:

- a)  $(a - b) \cdot (2x + 3y) - (a - b) \cdot (x - y) + (a - b) \cdot (x - 3y)$
- b)  $11xy + 33ax - 22xz$
- c)  $(x + y)^3 - (x + y)^2$
- d)  $ax + bx + ay + by$



e)  $6y^2 \cdot (z + 5) + 2z + 10$

f)  $b^2(b - c) + c^2(c - b)$

Jetzt soll noch untersucht werden, wie zwei Summen (z. B.  $(a + b)$  und  $(c + d)$ ) miteinander zu multiplizieren sind. Durch zweimalige Anwendung des Distributivgesetzes erhalten wir:

Multiplikation  
von Summen

$$\begin{aligned}(a + b) \cdot (c + d) &= (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d \\ &= c \cdot (a + b) + d \cdot (a + b) \\ &= ca + cb + da + db \\ &= ac + ad + bc + bd\end{aligned}$$

Im Endeffekt mußte also jeder Summand der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multipliziert werden; dies gilt auch, wenn die Anzahl der Summanden in einer Summe größer als zwei ist. Wir geben Ihnen jetzt noch einige Formeln an, die drei spezielle Produkte von Summen bzw. Differenzen betreffen:

### Die Binomischen Formeln

Die drei Binomischen Formeln lauten:

1.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2.  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3.  $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

#### Aufgabe 14

Rechnen Sie nach, daß die Binomischen Formeln für beliebige reelle Zahlen  $a$  und  $b$  gelten.

#### Aufgabe 15

Multiplizieren Sie aus und fassen Sie zusammen, wenn dies möglich ist:

a)  $(-0,1d + 6)(-3d - 1)$

b)  $(2c - 1)(2c + 2)$

- c)  $(0, 1d - 4)(-d - 1)$   
 d)  $(2ab + 3)(4ab - 0, 2)$   
 e)  $(0, 4ab - 1)(-0, 4ab + 0, 6)$   
 f)  $(-7de + 6eg)(de - 5eg)$

**Aufgabe 16**

Multiplizieren Sie mit Hilfe einer binomischen Formel aus:

- a)  $(2 - 0, 6b)(2 + 0, 6b)$   
 b)  $(2 + 1, 4b)^2$   
 c)  $(3a - 0, 9)^2$   
 d)  $(1, 2a - 0, 2d)^2$   
 e)  $(0, 5a + 0, 2y)^2$

**Aufgabe 17**

Geben Sie die folgenden Ausdrücke mittels einer binomischen Formel als Produkt von Summen bzw. Differenzen an:

- a)  $49a^2 + 42ay + 9y^2$   
 b)  $0, 64a^2 - 4c^2$   
 c)  $36a^2 - 1, 96d^2$   
 d)  $16a^2 - 72acy + 81c^2y^2$   
 e)  $0, 09d^2 - 0, 81g^2$   
 f)  $9d^2e^2 + 42deg + 49g^2$

**Aufgabe 18**

Ergänzen Sie die fehlenden Summanden:

- a)  $(d - \dots)^2 = \dots - 12dg + 36g^2$   
 b)  $(3a + \dots)^2 = 9a^2 + \dots + 16c^2$   
 c)  $(\dots + 5)^2 = \dots + 10a + 25$   
 d)  $(\dots - \dots)^2 = 49d^2 - \dots + 81e^2$   
 e)  $(d - \dots)^2 = d^2 - 6de + \dots$   
 f)  $(\dots - \dots)^2 = \dots - 3, 2de + 0, 64e^2$

## 1.2 Bruchrechnung

In dem Beispiel auf S. 17ff. wurde (ab Seite 20) bei den zum Lösen der Gleichung erforderlichen Umformungen auch Bruchrechnung angewendet. Bekanntlich läßt sich der Quotient aus zwei Zahlen  $a$  und  $b$  (also  $a : b$ ,  $b$  darf nicht Null sein) auch als Bruch  $\frac{a}{b}$  angeben; dabei wird  $a$  als Zähler und  $b$  als Nenner des Bruchs bezeichnet. Im Unterschied zum Divisionszeichen „:“ wirkt der Bruchstrich klammernd; es gilt also  $\frac{a+b}{a-b} = (a + b) : (a - b)$ .

Zähler  
Nenner

Für die Bruchrechnung gelten die folgenden Regeln:

### Regeln der Bruchrechnung

- **Erweitern eines Bruchs**

Der Wert eines Bruchs ändert sich nicht, wenn Zähler und Nenner mit dem gleichen Faktor  $c$  ( $c \neq 0$ ) multipliziert werden:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

Das Erweitern von Brüchen wird vor allem bei der Addition von Brüchen benötigt.

- **Kürzen eines Bruchs**

Der Wert eines Bruchs ändert sich nicht, wenn Zähler und Nenner durch den gleichen Divisor  $c$  ( $c \neq 0$ ) geteilt werden:

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$$

Das rechtzeitige Kürzen von Brüchen kann den Rechenaufwand erheblich senken.

- **Addition von Brüchen**

Um zwei Brüche zu addieren, muß man zunächst durch Erweitern dafür sorgen, daß sie den gleichen Nenner haben; am günstigsten wählt man als gemeinsamen Nenner (Hauptnenner) das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der beiden ursprünglichen Nenner (vgl. Aufgabe 14). Danach werden einfach die Zähler addiert, der Nenner beibehalten:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$$

Die Subtraktion von Brüchen erfolgt analog.

- **Multiplikation von Brüchen**

Zwei Brüche werden multipliziert, indem die Zähler miteinander und die Nenner miteinander multipliziert werden:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

- **Division von Brüchen**

Ein Bruch  $\frac{a}{b}$  wird durch einen Bruch  $\frac{c}{d}$  dividiert, indem  $\frac{a}{b}$  mit dem Kehrwert von  $\frac{c}{d}$  multipliziert wird:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

**Aufgabe 19**

Erweitern Sie die folgenden Brüche:

- a)  $\frac{5a}{6}$  mit dem Faktor  $2b$  ( $b \neq 0$ )
- b)  $\frac{1}{x}$  mit  $7y$  ( $x \neq 0, y \neq 0$ )
- c)  $\frac{1}{x+1}$  mit  $(x-1)$  ( $x \neq \pm 1$ )
- d)  $\frac{2a+3b}{2a-3b}$  mit  $(4a-6b)$  ( $a \neq \frac{3}{2}b$ )
- e)  $\frac{1}{7}$  mit  $-1$
- f)  $\frac{z-9}{9}$  mit  $-(9-z)$  ( $z \neq 9$ )
- g)  $\frac{x-2y}{y-x}$  mit  $(-x+y)$  ( $x \neq y$ )

**Aufgabe 20**

Kürzen Sie die folgenden Brüche soweit wie möglich (Tip: Wenn im Zähler oder im Nenner eine Summe steht, müssen Sie zunächst die Summe durch Ausklammern in ein Produkt verwandeln (Distributivgesetz)):

- a)  $\frac{156}{234}$
- b)  $\frac{36a^2}{12ab}$  ( $ab \neq 0$ )
- c)  $\frac{15x-24y}{3}$
- d)  $\frac{25a^2-49b^2}{5a+7b}$  ( $a \neq -\frac{7}{5}b$ ) Nicht aus Summen kürzen!
- e)  $\frac{25a^2-49b^2}{21b-15a}$  ( $a \neq \frac{7}{5}b$ )
- f)  $\frac{7ab-6a^2}{12a-14b}$  ( $a \neq \frac{7}{6}b$ )
- g)  $\frac{-81x^2+108xz-36z^2}{2z-3x}$  ( $x \neq \frac{2}{3}z$ )
- h)  $\frac{9x-4y}{45x+28y}$  ( $x \neq -\frac{28}{45}y$ )

**Aufgabe 21**

Addieren bzw. subtrahieren Sie die folgenden Brüche (Lassen Sie keine Gelegenheit zum Kürzen aus!).

Bevor Sie mit der Lösung der Aufgabe beginnen, geben wir Ihnen noch den folgenden Hinweis am Beispiel der Aufgabe  $\frac{1}{12c^2d} + \frac{1}{18cd^2}$  ( $cd \neq 0$ ): Bekanntlich erhalten Sie in jedem Fall einen Hauptnenner als Produkt der Nenner der beiden Summanden:  $12c^2d \cdot 18cd^2 = 216c^3d^3$ . Häufig ist das aber nicht der kleinste gemeinsame Nenner. Diesen erhalten wir als kleinstes gemeinsames Vielfaches (kgV) von  $12c^2d$  und  $18cd^2$ . Zur Bestimmung des kgV zerlegt man die beiden Ausdrücke zunächst in ihre

Primfaktoren und erhält dann das kgV wie folgt:

$$\begin{array}{r|l|l|l|l} 12c^2d & = & 2 \cdot 2 & \cdot 3 & \cdot c \cdot c & \cdot d \\ 18cd^2 & = & 2 & \cdot 3 \cdot 3 & \cdot c & \cdot d \cdot d \\ \hline \text{kgV} & = & 2 \cdot 2 & \cdot 3 \cdot 3 & \cdot c \cdot c & \cdot d \cdot d \end{array}$$

Das kleinste gemeinsame Vielfache ist also  $36c^2d^2$ .

a)  $\frac{56}{21a} + \frac{1}{3a} \quad (a \neq 0)$

b)  $\frac{44a}{33b} - \frac{3b}{4a} \quad (a \neq 0, b \neq 0)$

c)  $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{-x-y} \quad (x \neq -y)$

d)  $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} \quad (x \neq \pm y)$

e)  $\frac{x^3z}{x^3z+yx^2z} - \frac{7y^2}{7xy-7y^2} \quad (x \neq \pm y), z \neq 0, x \neq 0, y \neq 0$

f)  $\frac{3c+4d^2}{12c^2d} + \frac{6c^2-4,5d}{18cd^2} \quad (cd \neq 0)$

g)  $\frac{a}{72(a-b)} + \frac{b^2}{48(a^2-b^2)} \quad (a \neq \pm b)$

### Aufgabe 22

Multiplizieren bzw. dividieren Sie die folgenden Brüche. Beachten Sie bitte, daß Sie ein Produkt aus Brüchen nach den o.g. Regeln auch auf einem Bruchstrich notieren können (z. B.  $\frac{7}{9} \cdot \frac{18}{35} = \frac{7 \cdot 18}{9 \cdot 35}$ ), so daß zusätzliche Möglichkeiten zum Kürzen bestehen und es daher möglich ist, schon vor Ausführung der Multiplikation zu kürzen:  $\frac{7 \cdot 18}{9 \cdot 35} = \frac{7^1 \cdot 18}{9 \cdot 35} = \frac{1 \cdot 18^2}{9^1 \cdot 5} = \frac{2}{5}$ .

a)  $\frac{42}{15} \cdot \frac{25}{7}$

b)  $\frac{3}{14} \cdot \frac{35}{9} \cdot \frac{81}{40}$

c)  $\frac{12a+9b}{4a-3b} \cdot \frac{8a-6b}{4a+3b} \quad (a \neq \pm \frac{3}{4}b) \quad \text{Nicht aus Summen kürzen!}$

d)  $\frac{8y}{3x} \cdot \frac{15x^2}{56y^2} \quad (x \cdot y \neq 0)$

e)  $\frac{18a^2-50b^2}{a+6b} : \frac{3a-5b}{3a^2-108b^2} \quad (a \neq -6b, a^2 \neq 36b^2) \quad \text{Dito.}$

f)  $\frac{\left(\frac{9a^2bc^2}{81ab^2c}\right)}{\left(\frac{a^2bc}{27a^2b^2c}\right)} \quad (abc \neq 0)$

g)  $\frac{\left(\frac{x^5-x^3y^2}{x+y}\right)}{2x^4+5x^3} \cdot \frac{2x+5}{x-y} \quad (x \neq -\frac{5}{2}, x \neq \pm y, x \neq 0)$

**Aufgabe 23**

- a) Berechnen Sie bitte die ersten fünf Glieder einer arithmetischen Folge mit  $a_1 = \frac{1}{2}$  als Anfangsglied und der Differenz  $d = \frac{1}{3}$ . Das folgende Glied  $a_{n+1}$  errechnet sich dabei aus dem vorherigen ( $a_n$ ) wie folgt:  $a_{n+1} = a_n + d$ .
- b) Bestimmen Sie die Summe aus den ersten fünf Gliedern mit Hilfe der Summenformel

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) \quad (n = 5) .$$

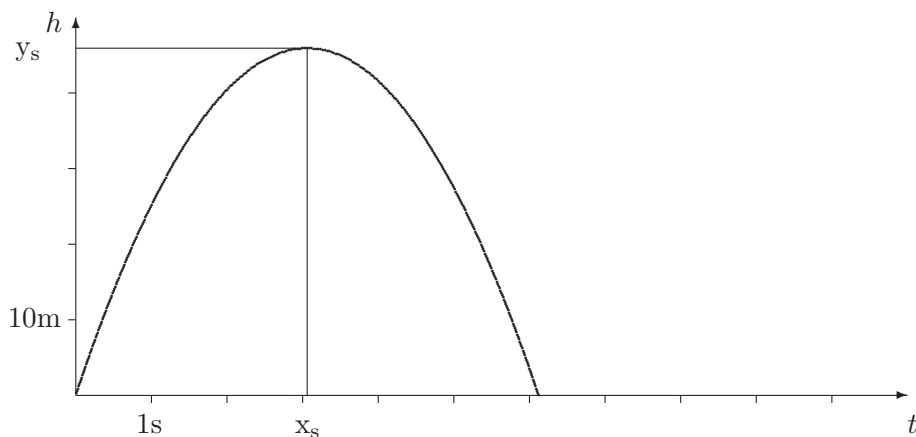
**1.3 Quadratische Gleichungen**

Wir greifen das einleitende Beispiel von Kapitel 1 wieder auf, betrachten Kugel  $A$  und stellen jetzt folgende Fragen:

1. Wie hoch kommt die Kugel  $A$  überhaupt; nach welcher Zeit ( $x_s$ ) erreicht sie ihre maximale Höhe ( $y_s$ )?
2. Wann passiert die Kugel  $A$  wieder die Stelle, von der sie abgeworfen wurde?

Werfen wir einen Blick auf die graphische Darstellung, erkennen wir, daß die erste Frage bedeutet, den Scheitelpunkt (hier: den höchsten Punkt) der Parabel zu bestimmen. Die zweite Frage führt auf die Aufgabe, die Schnittpunkte des Graphen mit der  $t$ -Achse zu berechnen.

Scheitelpunkt



Die Funktion, die die Höhe der Kugel in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt, ist eine quadratische Funktion; ihr Graph ist eine Parabel. Unter Verwendung der in der Mathematik üblichen Variablen  $x$  und  $y$  erhalten wir mit der Festsetzung

(\*)  $y = ax^2 + bx + c$ , (mit reellen Konstanten  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , wobei  $a \neq 0$ )

quadratische Funktion

die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion <sup>7</sup> in ihrer allgemeinsten Form. Diese Form ist allerdings wenig aussagekräftig, mehr Information über Lage und Gestalt der zugehörigen Parabel erhält man in der sogenannten allgemeinen Scheitelpunktsform (ASPF):

ASPF

$$y - y_s = a(x - x_s)^2 ,$$

in der  $x_s$  und  $y_s$  die Koordinaten des Scheitelpunkts bedeuten; der Konstanten  $a$  entnimmt man zusätzlich, ob die Parabel nach oben oder unter geöffnet ist ( $a > 0$  bzw.  $a < 0$ ) und ob sie weiter oder enger als die sogenannte Normalparabel  $y = x^2$  ist ( $|a| < 1$  : weiter,  $|a| > 1$  : enger).

Normalparabel

Im folgenden werden wir aus der allgemeinen Gleichung (\*) die ASPF herleiten:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c && | -c \\ y - c &= ax^2 + bx && | : a, a \neq 0 \\ \frac{1}{a}(y - c) &= x^2 + \frac{b}{a}x && | \text{Ergänzung der rechten Seite} \\ &&& | \text{zum „vollständigen Quadrat“} \\ &&& | \text{ („quadratische Ergänzung“)} \\ \frac{1}{a}(y - c) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 && | \text{Anwendung der} \\ &&& | \text{1. bin. Formel} \\ \frac{1}{a}(y - c) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 && | \cdot a \\ y - c + a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 && | \text{Umformen und} \\ &&& | \text{Zusammenfassen} \\ &&& | \text{der linken Seite} \\ y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der Gleichung

$$y - y_s = a(x - x_s)^2$$

führt zur Identifizierung von

$$-y_s \text{ mit } \frac{b^2 - 4ac}{4a} \text{ und } -x_s \text{ mit } \frac{b}{2a},$$

das heißt

$$y_s = \frac{4ac - b^2}{4a} \text{ und } x_s = -\frac{b}{2a}.$$

<sup>7</sup>Auf den Funktionsbegriff wird hier nicht näher eingegangen. Seine ausführliche Behandlung würde den hier gesteckten Rahmen sprengen .



Der Scheitelpunkt  $S$  der durch die Gleichung (\*) beschriebenen Parabel hat somit die Koordinaten Scheitelpunkt

$$S\left(-\frac{b}{2a} \mid \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

Kehren wir zurück zu unserem Beispiel mit der hochgeworfenen Kugel. Zunächst muß die Gleichung

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

mit der Darstellung  $y = ax^2 + bx + c$  „abgeglichen“ werden, was durch passendes Hinschreiben stark vereinfacht werden kann!

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ h &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t \end{aligned}$$

Wir erhalten die folgenden Entsprechungen:  $y \hat{=} h$ ,  $x \hat{=} t$ ,  $a \hat{=} -\frac{1}{2} g$ ,  $b \hat{=} v_0$ ,  $c \hat{=} 0$

Setzen wir diese Werte in den Term für die Scheitelpunktskoordinaten ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} S\left(-\frac{v_0}{2 \cdot (-\frac{1}{2} g)} \mid \frac{-v_0^2}{4 \cdot (-\frac{1}{2} g)}\right) &\quad \text{oder} \\ S\left(\frac{v_0}{g} \mid \frac{v_0^2}{2g}\right) \end{aligned}$$

Konkret mit  $v_0 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $g \approx 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} S\left(\frac{30 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \mid \frac{900 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}\right) &\quad \text{oder} \\ S(3,06\text{s} \mid 45,92\text{m}) \end{aligned}$$

d.h. die Kugel erreicht nach 3,06 s ihre größte Höhe  $h_{max} = 45,92$  m.

Diese Werte lassen sich wirklich nicht mehr aus der Zeichnung ablesen.

An dieser Stelle sei ein Hinweis auf den Umgang mit dimensionsbehafteten Größen gestattet:

Durch konsequentes Mitführen der Einheiten m und s erhalten wir am Ende unserer Rechnung insofern eine Bestätigung der Richtigkeit unserer Umformungen, als für die gesuchten Größen Zeit bzw. Höhe auch

die „richtigen“ Einheiten s bzw. m herauskommen! Solche Dimensionsbetrachtungen sind ganz allgemein bei der Umformung von Gleichungen eine bewährte Kontrollmöglichkeit, die Sie nach Möglichkeit immer nutzen sollten.

Wenden wir uns nun der zweiten Fragestellung zu, die uns auf das Lösen quadratischer Gleichungen führt, d. h. Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Aus Ihrer Schulzeit kennen Sie sicherlich noch das eine oder andere Lösungsverfahren, insbesondere die sogenannte p-q-Formel. Für spezielle Gleichungen ist diese Formel jedoch zu aufwendig, weswegen wir Ihnen verschiedene Lösungsverfahren vorstellen, die in bestimmten Situationen schneller zum Ziel führen. Zunächst aber werden wir die p-q-Formel behandeln.

Lösungsverfahren  
für quadratische  
Gleichungen

Zur Anwendung dieser Formel muß die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Normalform

zunächst in die sogenannte Normalform

$$x^2 + px + q = 0 \quad (\text{wobei } p = \frac{b}{a} \text{ und } q = \frac{c}{a} \text{ ist, } a \neq 0)$$

überführt werden. Häufig wird dieser Schritt bei der Anwendung vergessen!

Herleitung der Formel:

quadrat. Ergänzung

$$(*) \quad x^2 + px + q = 0 \quad | -q$$

$$x^2 + px = -q \quad | \text{quadratische Ergänzung}$$

$$x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad | \text{1. binomische Formel}$$

$$(**) \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

Ab hier ist eine Fallunterscheidung durchzuführen:

1. Der Term auf der rechten Seite,  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ , ist negativ.  
In diesem Fall hat die Gleichung (\*\*) und damit auch (\*) keine (reelle) Lösung, denn es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat negativ ist.

- 2.
- $(\frac{p}{2})^2 - q$
- ist gleich Null.

Wir erhalten dann die Gleichung

$$(x + \frac{p}{2})^2 = 0 \text{ mit der Lösung } x = -\frac{p}{2}$$

- 3.
- $(\frac{p}{2})^2 - q$
- ist größer als Null.

Jetzt ist es möglich, aus dem Term  $(\frac{p}{2})^2 - q$  die Wurzel zu ziehen, und wir erhalten aus

$$(x + \frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 - q \text{ die zwei Gleichungen:}$$

$$x + \frac{p}{2} = +\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} \text{ oder } x + \frac{p}{2} = -\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

bzw.

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} \text{ oder } x = -\frac{p}{2} - \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

häufig zusammengefaßt in der (auch für  $(\frac{p}{2})^2 - q = 0$  gültigen) Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}, \quad \text{falls } (\frac{p}{2})^2 - q \geq 0.$$

p-q-Formel

**Beispiele:**

1. Die Nullstellenberechnung der Funktion

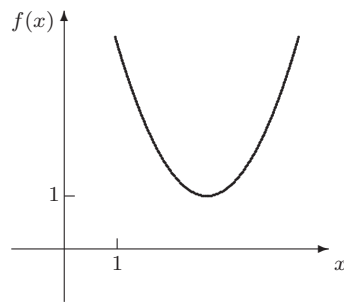
$$f(x) = x^2 - 6x + 10$$

führt zum Beispiel zur Lösung der folgenden quadratischen Gleichung :

$x^2 - 6x + 10$	$=$	$0$	-10
$\Leftrightarrow x^2 - 6x$	$=$	$-10$	Ergänzung der rechten Seite zum vollständigen Quadrat („quadratische Ergänzung“)
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + (\frac{-6}{2})^2$	$=$	$-10 + (\frac{-6}{2})^2$	$+ (\frac{-6}{2})^2$
$\Leftrightarrow (x - 3)^2$	$=$	$-10 + (\frac{-6}{2})^2$	Anwendung der 2.bin.Formel
$\Leftrightarrow (x - 3)^2$	$=$	$-1$	Zusammenfassen
			$\sqrt{\quad}$

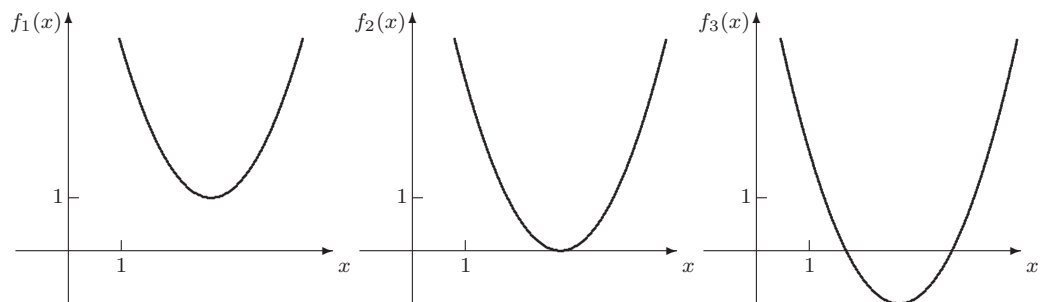
In diesem Fall „besitzt die Funktion keine Nullstellen“.

Die graphische Veranschaulichung der betrachteten Funktion bestätigt, daß die Funktion keine Schnittstellen mit der  $x$ -Achse besitzt.



Graph der Funktion  $f(x) = x^2 - 6x + 10$

Auch die Veranschaulichung bestätigt die o.a. Fallunterscheidung: Betrachten wir die Lage dieser Parabel zur  $x$ -Achse, so gibt es für Funktionen dieses Typs offensichtlich noch zwei weitere Verlaufsmöglichkeiten.



Graphen der Funktionen

$$f_1(x) = x^2 - 6x + 10, \quad f_2(x) = x^2 - 6x + 9, \quad f_3(x) = x^2 - 6x + 8$$

## Polynom 2. Grades

Allgemein läßt sich für Polynome 2. Grades

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_2 \neq 0$$

also die folgende Aussage formulieren: Ein Polynom  $f$  2-ten Grades hat höchstens 2 reelle Nullstellen.

Es gibt also quadratische Parabeln mit genau zwei Nullstellen, mit genau einer Nullstelle und solche, die keine Nullstellen in  $\mathbb{R}$  aufweisen.

## 2. Die Nullstellenberechnung der Funktion

$$f(x) = x^2 - 6x + 9$$

führt zur Lösung der folgenden quadratischen Gleichung :

$x^2 - 6x + 9$	$= 0$	-9
$\Leftrightarrow x^2 - 6x$	$= -9$	Ergänzung der rechten Seite zum vollständigen Quadrat („quadratische Ergänzung“) $+(\frac{-6}{2})^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + (\frac{-6}{2})^2$	$= -9 + (\frac{-6}{2})^2$	Anwendung der 2.bin.Formel
$\Leftrightarrow (x - 3)^2$	$= -9 + (\frac{-6}{2})^2$	Zusammenfassen
$\Leftrightarrow (x - 3)^2$	$= 0$	$\sqrt{\quad}$
$\Leftrightarrow x - 3$	$= 0$	+3
$\Leftrightarrow x$	$= 3$	

In diesem Fall „besitzt die Funktion genau eine Nullstelle“.

### 3. Die Nullstellenberechnung der Funktion

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

führt zur Lösung der folgenden quadratischen Gleichung :

$x^2 - 6x + 8$	$= 0$	-8
$\Leftrightarrow x^2 - 6x$	$= -8$	Ergänzung der rechten Seite zum vollständigen Quadrat („quadratische Ergänzung“) $+(\frac{-6}{2})^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + (\frac{-6}{2})^2$	$= -8 + (\frac{-6}{2})^2$	Anwendung der 2.bin.Formel
$\Leftrightarrow (x - 3)^2$	$= -8 + (\frac{-6}{2})^2$	Zusammenfassen
$\Leftrightarrow (x - 3)^2$	$= +1$	$\sqrt{\quad}$
$\Leftrightarrow x - 3$	$= +1$	
oder $x - 3$	$= -1$	+3
$\Leftrightarrow x$	$= +4$	
oder $x$	$= +2$	

In diesem Fall „besitzt die Funktion zwei Nullstellen“.

Zur Bestimmung der Lösungen einer quadratischen Gleichung läßt sich die o.a. p-q-Formel natürlich auch direkt auf eine quadratische Gleichung anwenden. Zum Beispiel:

$$-2x^2 - 18x - 38 = 0$$

$$\begin{array}{lcl}
 -2x^2 - 18x - 38 & = & 0 \\
 \Leftrightarrow x^2 + 9x + 19 & = & 0 \\
 \Leftrightarrow x_{1,2} & = & -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 19} \\
 \Leftrightarrow x_{1,2} & = & -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{76}{4}} \\
 \Leftrightarrow x_{1,2} & = & -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} \\
 \Leftrightarrow x_{1,2} & = & -\frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} \\
 \Leftrightarrow x_1 & = & -\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \\
 \text{oder } x_2 & = & -\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \\
 \Leftrightarrow x_1 & = & \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 9) \\
 \text{oder } x_2 & = & -\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 9)
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 :(-2) \\
 \text{Anwenden der p-q-Formel} \\
 \text{Zusammenfassen} \\
 \sqrt{\phantom{x}}
 \end{array} \right\}$$

### Anmerkungen

#### Diskriminante

- Der Term  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$  wird des öfteren mit  $D$  abgekürzt und als Diskriminante bezeichnet.
- Die Wurzel einer Zahl ist eindeutig, z.B.  $\sqrt{9} = 3$ .  
Sie ist nämlich definiert als die positive Lösung der zugehörigen quadratischen Gleichung, zum Beispiel  

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$
 ( $\vee$  ist ein mathematisches Symbol für „oder“)
- Erinnern wir uns daran, daß für die Anwendung der p-q-Formel zunächst die „Normalform“ herzustellen ist (s. Seite 34). Dabei gilt  $p = \frac{b}{a}$  und  $q = \frac{c}{a}$ . Daraus können wir durch Einsetzen dieser Gleichungen in die p-q-Formel sofort eine a-b-c-Formel herleiten:

#### a-b-c-Formel

$$\begin{array}{l}
 x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}, \quad a \neq 0 \text{ und} \\
 \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \geq 0 \\
 \text{oder } \boxed{x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}}.
 \end{array}$$

Zurück zur eingangs gestellten Frage: Wann erreicht die Kugel  $A$  wieder ihre Abwurfhöhe?

Die zu lösende Gleichung hat die Form

$$0 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Um die p-q-Formel anwenden zu können, überführen wir die Gleichung in die Normalform und bestimmen  $p$  und  $q$ :

$$\begin{aligned}
0 &= t^2 + pt + q \\
0 &= t^2 - \frac{2v_0}{g}t + 0 \quad p = -\frac{2v_0}{g}, \quad q = 0 \\
t_{1,2} &= \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - 0} \\
t_{1,2} &= \frac{v_0}{g} \pm \frac{v_0}{g} \\
t_1 &= \frac{v_0}{g} + \frac{v_0}{g} = \frac{2v_0}{g}, \quad t_2 = \frac{v_0}{g} - \frac{v_0}{g} = 0
\end{aligned}$$

Daß hier zwei Lösungen herauskommen, ist nicht verwunderlich, denn die Kugel befindet sich zu zwei Zeiten auf der Ausgangshöhe: beim Start ( $t = 0$ ) und bei der Abwärtsbewegung ( $t = \frac{2v_0}{g}$ , konkret  $t = \frac{2 \cdot 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 6,12\text{s}$ ).<sup>8</sup>

Zur Lösung kann man auch die allgemeine Lösungsformel benutzen:

Mit  $a = -\frac{1}{2}g$ ,  $b = v_0$  und  $c = 0$  erhält man

$$\begin{aligned}
t_{1,2} &= -\frac{v_0}{2 \cdot (-\frac{1}{2}g)} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{4 \cdot (-\frac{1}{2}g)^2}} \\
&= \frac{v_0}{g} \pm \frac{v_0}{g} \quad (\text{vgl. oben}).
\end{aligned}$$

An dieser konkreten Aufgabe können wir nun demonstrieren, daß die Lösung viel einfacher zu erhalten ist: Wir gehen wieder aus von der Gleichung

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t.$$

Durch Ausklammern von  $t$  auf der rechten Seite erhalten wir

$$0 = t \cdot \left(-\frac{1}{2}gt + v_0\right).$$

Klammern wir zusätzlich  $-\frac{1}{2}g$  aus, erhalten wir

$$0 = -\frac{1}{2}gt\left(t - \frac{2v_0}{g}\right).$$

---

<sup>8</sup>Vgl. Skizze auf S. 18

Produkt aus Faktoren  
gleich Null

Nun ist ein Produkt aus zwei Faktoren genau dann gleich Null, wenn (mindestens) einer der Faktoren Null ist. Die obige Gleichung ist also äquivalent zu

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}gt &= 0 \vee t - \frac{2v_0}{g} = 0 \\ \Leftrightarrow t &= 0 \vee t = \frac{2v_0}{g}, \end{aligned}$$

womit wir unsere Lösungen erneut bestätigt haben. Dieses letzte, elegantere Verfahren läßt sich hier anwenden, weil die Gleichung eine besondere Form aufweist, nämlich kein absolutes Glied (konstantes,  $x$ - bzw.  $t$ -freies Glied) hat.

Faktorisieren

Auch wenn diese spezielle Form nicht vorliegt, kann man durch systematisches Probieren<sup>9</sup> versuchen, den Term zu faktorisieren. Das Verfahren sei an mehreren Beispielen vorgestellt:

$$\begin{aligned} a) \quad 0 &= x^2 + 7x + 10 \\ \Leftrightarrow 0 &= (x + 2)(x + 5) \\ \Leftrightarrow 0 &= x + 2 \vee 0 = x + 5 \\ \Leftrightarrow x &= -2 \vee x = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad 0 &= x^2 - 11x - 26 \\ \Leftrightarrow 0 &= (x - 13)(x + 2) \\ \Leftrightarrow x &= 13 \vee x = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad 0 &= x^2 + 11x - 26 \\ \Leftrightarrow 0 &= (x + 13)(x - 2) \\ \Leftrightarrow x &= -13 \vee x = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad 0 &= x^2 - 7x + 10 \\ 0 &= (x - 2)(x - 5) \\ x &= 2 \vee x = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) \quad 0 &= x^2 - 49 \\ \Leftrightarrow 0 &= (x + 7)(x - 7) && \text{3. binomische Formel} \\ \Leftrightarrow x &= -7 \vee x = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f) \quad 0 &= x^2 + 4x + 4 \\ \Leftrightarrow 0 &= (x + 2)^2 && \text{1. binomische Formel} \\ \Leftrightarrow x &= -2 \end{aligned}$$

Haben Sie herausgefunden, wie man die benötigten Faktoren „errät“? Eine Umkehrung der Vorgehensweise zeigt die Idee:

Aus  $(x + 2)(x + 5)$  wird durch Ausmultiplizieren zunächst der Term  $x^2 + 2x + 5x + 2 \cdot 5$ , der sich zu  $x^2 + (2 + 5)x + 2 \cdot 5 = x^2 + 7x + 10$

<sup>9</sup>Siehe auch Seite 42.



zusammenfassen lässt. Arbeitet man mit Konstanten  $a$  und  $b$ , erhält man

$$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + (a + b)x + a \cdot b.$$

Der Weg von links nach rechts, das Ausmultiplizieren, bereitet keine Schwierigkeiten; für die andere Richtung (das Faktorisieren) benötigen Sie etwas Training. Vollziehen Sie die folgenden Beispiele gründlich nach!



$$x^2 - 5x - 24 = 0$$



$$p = -5, q = -24$$

$$(x + 3)(x - 8) = 0$$

$$x_{1,2} = +\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 24}$$

$$x = -3 \vee x = 8$$

$$= +\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{96}{4}}$$

$$= +\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4}}$$

$$= +\frac{5}{2} \pm \frac{11}{2}$$

$$x_1 = \frac{16}{2} = 8, x_2 = -\frac{6}{2} = -3$$

So elegant dieses Verfahren ist, sein Nachteil sei nicht verschwiegen: Es funktioniert nur dann so überschaubar einfach, wenn die Gleichung in der Normalform vorliegt und ganzzahlige Lösungen hat. Wenn eine dieser Voraussetzungen nicht vorliegt, müssen Sie auf die anderen Verfahren zurückgreifen.

Jetzt sind Sie dran; überlegen Sie bitte bei jeder Gleichung, welches Lösungsverfahren Ihnen angemessen erscheint!

Sie haben reiche Auswahl: Lösungsformel (p-q oder a-b-c), quadratische Ergänzung, Faktorisieren, binom. Formel(n) rückwärts.

### Aufgabe 24

Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen:

a)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

b)  $x^2 + 2x = 3$

c)  $x^2 - 3x = 3$

d)  $2x^2 - 4 = 2x$

e)  $9x^2 = 25$

f)  $x^2 + 5x + 10 = 0$

g)  $2x^2 - 12x + 18 = 0$

### Aufgabe 25

a)  $x^2 + 12x + 35 = 0$

b)  $x^2 - 18x + 65 = 0$

c)  $x^2 - 4x + 21 = 0$

d)  $4x^2 + 56x + 1960 = 0$

e)  $4x^2 + 62x + 323 = -10x - 1$

f)  $(2x + 1)^2 = -44x - 127$

g)  $x^2 - 9x + 18 = 0$

h)  $x^2 - 13x + 40 = 0$

i)  $x^2 + 7x + 29 = 0$

j)  $-2x^2 - 34x - 140 = 0$

k)  $-7x^2 - 128x - 500 = -9x + 4$

l)  $(2x + 5)(2x - 5) = -60x - 241$

### Aufgabe 26

„spezial“

a) Für welche reellen Zahlen  $m$  hat die Gleichung  
 $0 = x^2 + mx + 2$

- keine
- eine
- zwei Lösungen?

b)  $0 = 3x^3 + 2x^2 + x$

Tip: Klammern Sie zunächst  $x$  aus.

c)  $0 = x^4 - 13x^2 + 36$

Tip: Ersetzen Sie  $x^2$  durch  $z$  und formulieren Sie dann die Gleichung mit Hilfe von  $z$  (ohne  $x!$ ).<sup>10</sup>

d)  $0 = 2x^5 - 26x^3 + 72x$

Wenden Sie bitte die Tips zu den Aufgabenteilen b) und c) in dieser Reihenfolge an.

### Aufgabe 27

Wir wandeln die zu Beginn dieses Kapitels gestellte Frage jetzt leicht ab.<sup>11</sup> Zu welchen Zeitpunkten befindet sich die Kugel A in einer Höhe

<sup>10</sup>Dieser Gleichungstyp wird auch als biquadratische Gleichung bezeichnet.

<sup>11</sup>Vergleichen Sie bitte S. 17ff.

von 30 m?

**Aufgabe 28**

Bestimmen Sie die Scheitelpunkte folgender Parabeln:

a)  $y = 2x^2 - 3x + 2$

b)  $y = -5x^2 - 10x + 12$

### 1.4 Rechnen mit Beträgen

Im Vergleich zur Bruchrechnung wird Ihnen das Rechnen mit Beträgen in der Schulmathematik wohl eher selten begegnet sein. Dennoch zählt der sichere Umgang mit Beträgen zu den Grundfertigkeiten, die Sie beherrschen sollten. Vor allem beim Lösen quadratischer Gleichungen und Ungleichungen werden Sie immer wieder mit Beträgen konfrontiert.

Im Kapitel 0 („Mengen und ihre verschiedenen Darstellungen“) haben wir (reelle) Zahlen durch Anordnung auf der (reellen) Zahlengeraden dargestellt (S.9ff.). Der Abstand einer (reellen) Zahl  $a$  von 0 wird als absoluter Betrag dieser Zahl bezeichnet; zur Kennzeichnung des Betrags werden senkrechte Striche verwendet:  $|a|$ .

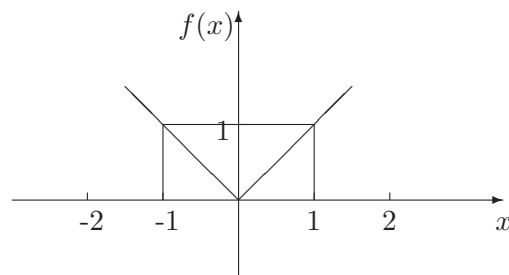
Es ist z.B.  $|1,5| = 1,5$  und  $|-1,5| = 1,5$ .

Für  $a \in \mathbb{R}$  ist

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a \leq 0 \end{cases}$$

Ausgehend von der genannten Definition des absoluten Betrags läßt sich feststellen: Beträge reeller Zahlen können also nur positive Werte oder den Wert Null annehmen.

Dieser Sachverhalt sei im folgenden anhand der Betragsfunktion  $f$  mit  $f(x) = |x|$  veranschaulicht:



Ganz typisch für die Graphen von Betragsfunktionen ist der sogenannte „Knick“; hier befindet er sich an der Stelle 0.

absoluter Betrag  
 $|a|$

**Aufgabe 29**

Bestimmen Sie:

a)  $|-925|$

b)  $|+23,91|$

c)  $|-17\frac{7}{9}|$

**Aufgabe 30**Welche reellen Zahlen lassen sich für  $x$  einsetzen?

a)  $|x| = 0$

b)  $|x| = 5,1$

c)  $|x| = \frac{5}{13}$

d)  $|x| = -1$

e)  $|x| = |-1|$

**Beispiel:**

Bei der Lösung von quadratischen Gleichungen, wie in einem Beispiel auf S.32 ( $x^2 - 6x + 8 = 0$ ) gelangt man nach einigen Umformungen zu  $(x-3)^2 = 1$ . Daraus hatten wir  $x-3 = +1$  oder  $x-3 = -1$  gefolgert. Anstelle der beiden Gleichungen können wir nun auch  $|x-3| = 1$  schreiben.

Nach der Definition des absoluten Betrags gilt für  $|x-3|$  folgende Fallunterscheidung:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{für } x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{für } x-3 < 0 \end{cases}$$

Also:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{für } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{für } x < 3 \end{cases}$$

Also:

$$\begin{aligned} x-3 &= 1 && (\text{für } x \geq 3) && \text{oder} \\ -x+3 &= 1 && (\text{für } x < 3) \end{aligned}$$

Nun läßt sich das Ergebnis ablesen:

$$\begin{aligned} x &= 4 && (4 \geq 3) && \text{oder} \\ x &= 2 && (2 < 3) \end{aligned}$$

**Aufgabe 31**

Welche reellen Zahlen lassen sich für  $x$  einsetzen?

- a)  $|x - 3| = 4$
- b)  $|x^2 - 5| = 4$
- c)  $1 \leq |-3x| \leq 6$
- d)  $|x + 1| = |\frac{1}{2}x + 2|$

**Aufgabe 32**

Eine Summe aus vier Summanden beträgt +10. Von den vier Summanden sind aber nur die absoluten Beträge bekannt: 4, 6, 8 und 12.

**Aufgabe 33**

Untersuchen Sie die folgenden Gleichungen im Hinblick auf ihre Gültigkeit ( $x, y \in \mathbb{R}$ ). Falls Sie herausfinden, daß eine der Gleichungen nicht allgemein gilt, geben Sie bitte ein Zahlenbeispiel dafür an.

- a)  $|x + y| = |x| + |y|$
- b)  $|x - y| = |x| - |y|$
- c)  $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- d)  $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$  ( $y \neq 0$ )

**1.5 Lösen von Ungleichungen**

In der Schulmathematik nimmt das Rechnen mit Ungleichungen eher eine untergeordnete Rolle ein, da andere Inhalte Priorität haben. Die Einführung der Umformungsregeln für Ungleichungen ist in der Mittelstufe vorgesehen. Später wird die Thematik dann nur noch sehr selten und punktuell wieder aufgegriffen wie z.B. beim Lösen von linearen Optimierungsaufgaben. Daher sind entsprechende Kenntnisse aus dem Schulunterricht im allgemeinen nur lückenhaft vorhanden. Da Sie die Umformungsregeln von Ungleichungen aber, insbesondere bei Abschätzungen und Grenzwertbetrachtungen beherrschen sollten, werden wir diese hier zusammenstellen.

Im letzten Abschnitt (1.4 Rechnen mit Beträgen, Aufgabe 33 (a)) haben Sie mit „ $|x+y| \leq |x|+|y|$ “ ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) eine allgemeingültige Ungleichung kennengelernt. Eine Ungleichung, die für alle möglichen (reellen) Einsetzungen wahre Aussagen liefert, wird auch als allgemeingültig bezeichnet.



Die o. a. Ungleichung beschreibt die offensichtlich gültige Aussage, daß in einem Dreieck eine Seite höchstens gleich der Summe der beiden anderen Dreiecksseiten ist. Daher trägt diese Ungleichung auch den Namen „Dreiecksungleichung“. Falls Sie sich schon einmal mit Vektoren beschäftigt haben, können Sie sich diese Deutung ausgezeichnet veranschaulichen.<sup>12</sup>

Dreiecksungleichung

Im folgenden werden wir erfüllbare Ungleichungen behandeln. Diese unterscheiden sich von den allgemeingültigen Ungleichungen dadurch, daß sie nicht für jede sondern für mindestens eine Belegung wahr sind. Die (nicht leere!) Menge der Belegungen, für die eine Ungleichung gültig ist wird auch als Gültigkeitsbereich, Erfüllungsmenge oder Lösungsmenge bezeichnet.

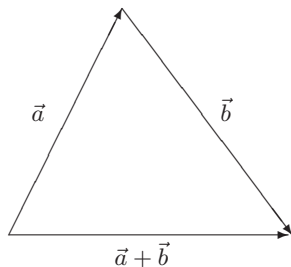
erfüllbare  
UngleichungGültigkeitsbereich  
Erfüllungsmenge  
Lösungsmenge**Beispiel:**

Es soll der Gültigkeitsbereich der folgenden Ungleichung bestimmt werden:

$$9 + 2x - 20 < 8x + 4 - 3x$$

Ziel ist es, die Ungleichung in die Form  $x < \dots$  bzw.  $x > \dots$  zu überführen, um dann die Erfüllungsmenge abzulesen.

---

 12


$9 + 2x - 20 < 8x + 4 - 3x$		
$2x - 11 < 5x + 4$		Zusammenfassen von Zahlen bzw. Variablen auf e i n e r Seite der Ungleichung
$2x - 11 + 11 < 5x + 4 + 11$		{+11} Additionsregel Addition derselben Zahl (bzw. Variablen) auf b e i d e n Seiten der Ungleichung
$2x < 5x + 15$		Zusammenfassen
$2x - 5x < 5x + 15 - 5x$		{+(-5x)} Additionsregel Addition derselben Variablen (bzw. Zahl) auf b e i d e n Seiten der Ungleichung
$-3x < +15$		Zusammenfassen
$-3x \cdot (-\frac{1}{3}) > +15 \cdot (-\frac{1}{3})$		{·(-\frac{1}{3})} Multiplikationsregel !Beachten Sie das Ungleichheitszeichen!
$x > -5$		Zusammenfassen

Die Lösungsmenge der Ungleichung lässt sich nun auf verschiedene Arten angeben (vergleichen Sie Kapitel 0 „Mengen und ihre verschiedenen Schreibweisen“):

$$\mathbb{L} = \{x | (x \in \mathbb{R}) \wedge (x > -5)\} \quad \text{oder}$$

$$\mathbb{L} = ]5, \infty[$$

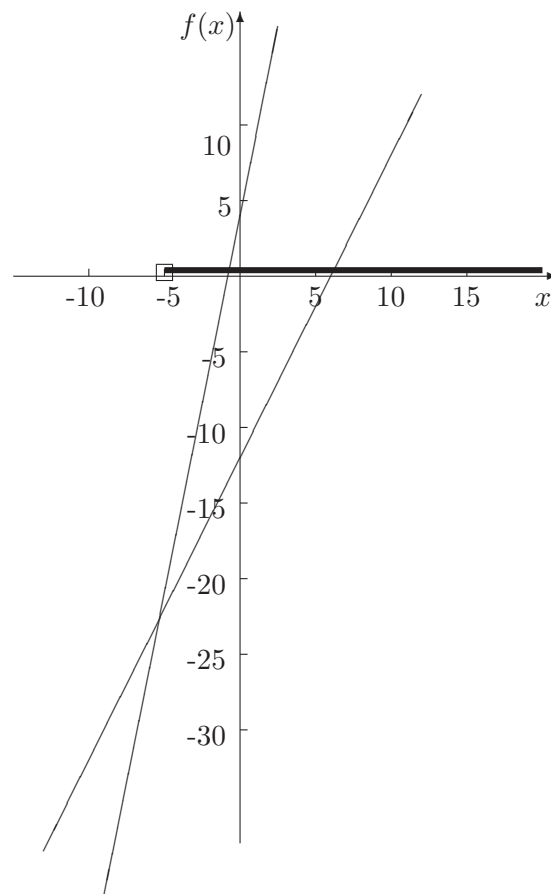
Die Lösungsmenge lässt sich auch im Koordinatensystem veranschaulichen.

Betrachten wir noch einmal die gegebene Ungleichung:

$$9 + 2x - 20 < 8x + 4 - 3x$$

Fassen wir die beiden Seiten der Ungleichung als Vorschriften der Funktionen  $f_1(x) = 2x - 11$  und  $f_2(x) = 5x + 4$  auf, so lässt sich die o.a. Aufgabe folgendermaßen deuten: Es ist nach der Menge der reellen Zahlen  $x$  gefragt, für die die Funktionswerte von  $f_1$  kleiner sind als die Werte von  $f_2$ .

Am Schaubild lassen sich diese Werte dann ablesen.



### Bemerkungen zu den angewendeten Umformungsregeln:

- **Zusammenfassen**

Auf *e i n e r* Seite einer Ungleichung dürfen selbstverständlich Zahlen bzw. Variablen und natürlich auch Größen zusammengefaßt werden, ohne daß die Lösungsmenge dadurch verändert wird.

Zusammenfassen

- **Additionsregel**

Wird auf *b e i d e n* Seiten einer Ungleichung eine positive oder negative Zahl bzw. Variable oder auch Größe addiert, so ändert sich die Lösungsmenge dadurch nicht. D.h., es handelt sich um eine sog. Äquivalenzumformung.

Additionsregel

- **Multiplikationsregel**

!Multiplikationsregel

- Wird eine Ungleichung mit einer positiven Zahl ( $a > 0, a \in \mathbb{R}$ ) bzw. Variablen oder Größe multipliziert, so wird diese Operation auf *b e i d e n* Seiten der Ungleichung ausgeführt ohne Einfluß auf die Lösungsmenge; diese Umformung ist also eine weitere Äquivalenzumformung.
- Wird eine Ungleichung aber mit einer negativen Zahl ( $a < 0, a \in \mathbb{R}$ ) bzw. Variablen oder Größe multipliziert, so wird diese Operation auf *b e i d e n* Seiten der Ungleichung ausgeführt und das Ungleichheitszeichen kehrt sich um!

**Anmerkungen:**

Wir können uns die Gültigkeit der zweiten Multiplikationsregel schnell plausibel machen. Die Anwendung dieser Regel („Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl“) läßt sich auch „umgehen“: Die mehrfache Anwendung der Additionsregel und der ersten Multiplikationsregel führen zum selben Ergebnis. Dazu greifen wir das o.a. Beispiel noch einmal ab der drittletzten Zeile auf:

$-3x$	$<$	$+15$	Zusammenfassen
$-3x + 3x$	$<$	$15 + 3x$	$\{+3x\}$ Additionsregel
$0$	$<$	$15 + 3x$	Zusammenfassen
$0 - 15$	$<$	$15 + 3x - 15$	$\{-15\}$ Additionsregel
$-15$	$<$	$3x$	Zusammenfassen
$-15 \cdot \frac{1}{3}$	$<$	$3x \cdot \frac{1}{3}$	$\{\cdot \frac{1}{3}\}$ Multiplikationsregel
$-5$	$<$	$x$	Zusammenfassen

Lösen Sie bitten die folgenden Übungsaufgaben.

**Aufgabe 34**

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen (notieren Sie bitte, welche Umformungsregeln Sie anwenden):

- a)  $18x - 18 < 90$
- b)  $4,7 - 1,4x < 11,7$
- c)  $-\frac{3}{4} > -\frac{1}{4}r - 1$
- d)  $\frac{7}{3} - 2z \leq 4\frac{2}{3} + \frac{1}{3}z$

**Aufgabe 35**

Aus 400 Gramm Kräuterextrakt sollen 600 Gramm Likör mit einem Alkoholgehalt von mindestens 25% hergestellt werden. Wievielperzentiger Alkohol muß zugegeben werden?

**Beispiel:**

Für eine lineare Ungleichung können Sie jetzt den Gültigkeitsbereich bestimmen. Wie sieht es aber bei quadratischen Ungleichungen aus? Wir betrachten die folgende quadratische Ungleichung:

$$x^2 + 6x - 7 < 0$$

Auch hier ist es wieder unser Ziel, die Ungleichung so umzuformen, daß wir die Erfüllungsmenge direkt ablesen können.

$x^2 + 6x - 7 < 0$		
$x^2 + 6x - 7 + 7 < 0 + 7$		{+7} Additionsregel
$x^2 + 6x < 7$		Zusammenfassen
$x^2 + 6x + (\frac{6}{2})^2 < 7 + (\frac{6}{2})^2$		{+(\frac{6}{2})^2} Additionsregel / quadrat.Ergänzung
$(x + 3)^2 < 16$		Zusammenfassen
$ x + 3  < 4$		Bilden der 2. Wurzel
		Wir verwenden die <b>übersichtliche</b> Betragsschreibweise!
$x + 3 < 4$		f. $x + 3 \geq 0$
und		
$-x - 3 < 4$		f. $x + 3 < 0$ Definition „Betrag“
$x < 1$		f. $x \geq -3$
und		
$x > -7$		f. $x < -3$ Umformungsregeln f. Ungl.
$-7 < x < 1$		Zusammenfassen

Für die Lösungsmenge ergibt sich:

$$\mathbb{L} = \{x | (x \in \mathbb{R}) \wedge (x > -7) \wedge (x < 1)\} \text{ oder}$$

$$\mathbb{L} = ] -7, 1[$$

### Aufgabe 36

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen:

a)  $4x^2 - 9 > 0$

b)  $2(x + 2)^2 > -8$

c)  $2(x + 2)^2 < -8$

d)  $4x^2 + 12x < 16$



Bevor wir mit dem nächsten Abschnitt beginnen, geben wir zunächst die mit diesem Kapitel angestrebten Lernziele an:

**Lernziele zum Kapitel 2 „Potenz- und Wurzelrechnung, Exponentialgleichungen und Logarithmen, Trigonometrie“**

*Nach dem Bearbeiten dieses Kapitels sollten Sie*

- *die Regeln für Potenzen (Wurzeln als Spezialfall) und Logarithmen kennen und beim Lsen von Gleichungen anwenden können*
- *und elementare Stze, die für allgemeine und insbesondere für rechtwinklige Dreiecke gelten, kennen und anwenden können; dazu zählen neben den elementaren Stzen aus der Geometrie (wie z.B. der Satz des Pythagoras) insbesondere die Beziehungen Sinus, Kosinus, Tangens und Cotangens im rechtwinkligen Dreieck und der Sinus- und Kosinussatz im allgemeinen Dreieck.*

## 2 Potenz- und Wurzelrechnung, Exponentialgleichungen und Logarithmen, Trigonometrie

*Ziel dieses Abschnittes ist die Behandlung von Exponentialgleichungen und der Logarithmusrechnung. Als notwendige Voraussetzung werden zunächst die Regeln der Potenzrechnung wiederholt. Die Regeln der Wurzelrechnung ergeben sich dabei als Spezialfall.*

### 2.1 Potenz- und Wurzelrechnung

Potenzen werden schon in der fünften Klasse für den Fall definiert, daß der Exponent (die Hochzahl) eine natürliche Zahl ist. Der Ausdruck  $a^n$  bedeutet dann bekanntlich, daß die Zahl  $a$   $n$ -mal mit sich selbst zu multiplizieren ist. Mit Hilfe der Gesetze der Bruchrechnung lassen sich daraus einige Rechenregeln ableiten, z. B. für den Fall  $m > n$  und  $a \neq 0$  die Regel

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad .$$

Potenzen lassen sich aber auch dann interpretieren, wenn der Exponent eine negative Zahl oder ein Bruch ist. Wenn z. B. die obige Regel allgemein gelten soll, folgt zunächst

$$\frac{5^4}{5^7} = 5^{4-7} = 5^{-3}$$

Andererseits ist nach den Regeln der Bruchrechnung  $\frac{5^4}{5^7} = \frac{1}{5^3}$ , so daß  $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$  folgt. Allgemein gilt

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

Eine ähnliche Überlegung führt auf die Festlegung  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ .

Die wichtigsten Regeln der Potenzrechnung lauten:

Für  $a, b, x, y \in \mathbb{R}$  und  $a, b > 0$  gilt:

- |                                     |   |
|-------------------------------------|---|
| (1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$       | z.B. $3^2 \cdot 3^5 = 3^7$              |
| (2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$     | z.B. $\frac{3^7}{3^2} = 3^5$            |
| (3) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ | z.B. $(3 \cdot 4)^5 = 3^5 \cdot 4^5$    |
| (4) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$       | z.B. $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$ |

Insbesondere gilt:

- |  |  |
|--|--|
| (5) $a^0 = 1$  | z.B. $3^0 = 3^{2-2} = \frac{3^2}{3^2} = 1$                                 |
| (6) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$                               | z.B. $5^{-4} = 5^{0-4} = \frac{5^0}{5^4} = \frac{1}{5^4}$                  |
| (7) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ für $n \in \mathbb{N}$ | z.B. $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ |

Regeln der Potenzrechnung; „echt reelle“ Exponenten sind damit noch nicht motiviert!



Die Regeln (1) - (6) gelten insbesondere für  $x, y \in \mathbb{N}$  und  $a, b \in \mathbb{R}$ .  
Diese Regeln erlauben auch die Interpretation beliebiger Bruchzahlen  
als Exponenten. Als Beispiel wählen wir den Ausdruck  $a^{-\frac{2}{3}}$ :

$$\begin{aligned} a^{-\frac{2}{3}} &= a^{2 \cdot (-\frac{1}{3})} \\ &= (a^2)^{-\frac{1}{3}} \\ &= (a^2)^{\frac{1}{3} \cdot (-1)} \\ &= \frac{1}{(a^2)^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \end{aligned}$$

### Aufgabe 37

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mit  $a, b > 0$  :

- (a)  $a^3 \cdot a^4$
- (b)  $a^5 + a^2$
- (c)  $(a^3)^4$
- (d)  $b^7 + b^7$
- (e)  $(4a)^3$
- (f)  $(3 + a)^2$
- (g)  $\frac{a^2 \cdot b^{-1}}{a^3 \cdot b^2}$
- (h)  $\sqrt{a} \cdot a$
- (i)  $(\frac{1}{a^2})^2$
- (j)  $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$
- (k)  $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[12]{a}}$
- (l)  $\sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a^2}}\right)^6}$

### Aufgabe 38

Vereinfachen Sie ( $a, b, x, y$  seien positiv):

- a)  $\frac{(15x^2y^{-3})^{-4}}{(25x^3y^{-6})^{-2}}$
- b)  $\frac{(8x^3y^{-3})^{-2}}{(12x^{-2}y^{-4})^{-3}}$
- c)  $(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$
- d)  $(\sqrt{a+b} - \sqrt{b})(\sqrt{a+b} + \sqrt{b})$
- e)  $(1 + \sqrt{x} + \sqrt{x^2} + \sqrt{x^3})(1 - \sqrt{x})$



- (c) Bei verschiedenen Experimenten werden die folgenden Wege in den ebenfalls angegebenen Zeiten zurückgelegt:

Weg	Zeit
14 mm	2 ns
6 mm	3 ps
4 Gm	200 s

Geben Sie die jeweilige Durchschnittsgeschwindigkeit  $v$  in  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $\frac{\text{km}}{\text{s}}$  und  $\frac{\text{km}}{\text{h}}$  an. Bei welchem Experiment wurde die geringste Geschwindigkeit ermittelt? Bei welchem Experiment liegt ein Meßfehler vor?

Bevor wir uns den Exponentialgleichungen zuwenden, wollen wir dem Titel dieses Unterabschnitts Genüge tun und uns mit der Wurzelrechnung befassen. Im Grunde haben wir bereits alle notwendigen Regeln zur Verfügung, denn Wurzeln können ja immer als Potenzen ausgedrückt werden. Dennoch geben wir einige Regeln auch noch in Wurzelschreibweise an:

Regeln der  
Wurzelrechnung

<p>Für natürliche Zahlen <math>m</math> und <math>n</math> sowie reelle Zahlen <math>a</math> und <math>b</math> (<math>a, b &gt; 0</math>) gilt:</p> <p>(1) <math>\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}</math></p> <p>(2) <math>\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}</math></p> <p>(3) <math>\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}</math></p>
---

### Aufgabe 41

Vereinfachen Sie:

- a)  $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2}$
- b)  $\sqrt[6]{81} \cdot \sqrt[6]{9}$
- c)  $\sqrt[13]{1,3^9} \cdot \sqrt[13]{1,3^4}$
- d)  $\sqrt[3]{\sqrt[2]{9^3}}$
- e)  $\frac{\sqrt[10]{5120}}{\sqrt[10]{5}}$
- f)  $\sqrt[8]{\sqrt[3]{4^{-8}}}$

### Aufgabe 42

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke ( $x, y, a, b$  seien positiv):

a)  $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}$

b)  $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{5}}$

c)  $\sqrt[7]{\frac{\sqrt[3]{x^{21}a+x^{21}b}}{\sqrt[3]{a+b}}}$

## 2.2 Exponentialgleichungen

Eine wichtige Anwendung der Potenzrechnung ist die Beschreibung von Wachstumsprozessen mit Hilfe von Exponentialgleichungen. Diese sind dadurch gekennzeichnet, daß die Variable als Exponent oder als Bestandteil des Exponenten auftaucht.

Als erstes Beispiel stellen wir die Beschreibung eines biologischen Wachstumsprozesses vor. Danach werden wir als weiteren Anwendungsfall die bekannte Formel für den Zinseszins untersuchen.

Beispiel 1

Ein See ist mit Algen verschmutzt. Die Algen verdoppeln sich flächenmäßig an einem Tag. Zur Zeit nehmen die Algen  $1 \text{ cm}^2$  der Gesamtfläche des Sees ein.

Mit diesen Angaben können wir eine Tabelle über den Wachstumsverlauf dieser Algen erstellen:

Tage	Fläche der Algen
0	$1 \text{ cm}^2$
1	$2 \text{ cm}^2$
2	$4 \text{ cm}^2$
3	$8 \text{ cm}^2$

Hieraus können wir eine Beziehung zwischen der Anzahl der Tage und der Algenfläche ableiten: Nach  $n$  Tagen ist die Fläche  $2^n \text{ cm}^2$  groß, ( $n \in \mathbb{N}$ ). Wir können auch Aussagen über bereits vergangene Tage machen. Wenn die Algenfläche sich täglich verdoppelt und z. Z.  $1 \text{ cm}^2$  beträgt, müssen die Algen vor einem Tag eine Fläche von  $\frac{1}{2} \text{ cm}^2$ , vor zwei Tagen eine Fläche von  $\frac{1}{4} \text{ cm}^2$  eingenommen haben. Diese Werte erhalten wir auch, wenn wir in den Ausdruck „ $2^n \text{ cm}^2$ “ für  $n$  die Werte  $-1$  und  $-2$  einsetzen:

Tage	Fläche der Algen
0	$2^0 \text{ cm}^2 = 1 \text{ cm}^2$
-1	$2^{-1} \text{ cm}^2 = 0.5 \text{ cm}^2$
-2	$2^{-2} \text{ cm}^2 = 0.25 \text{ cm}^2$

Der Ausdruck liefert auch sinnvolle Werte, wenn wir uns nicht auf ganze Zahlen beschränken und zum Beispiel Brüche für  $n$  einsetzen: <sup>14</sup>

<sup>14</sup>Beispielsweise kann man den für  $n = \frac{1}{2}$  errechneten Wert wie folgt interpretieren: Die Algenfläche zum Zeitpunkt Null beträgt  $1 \text{ cm}^2$ . Nach der Formel erhalten wir für die Fläche nach einem halben Tag den Wert  $\sqrt{2} \text{ cm}^2$ . An einem halben Tag hat sich die Fläche also „verwurzelzweifacht“. Nach einem weiteren halben Tag kommen wir durch eine weitere „Verwurzelzweifachung“ des Wertes  $\sqrt{2} \text{ cm}^2$  zu der tatsächlich nach einem ganzen Tag vorhandenen Fläche:  $\sqrt{2} \text{ cm}^2 \cdot \sqrt{2} = 2 \text{ cm}^2$ .

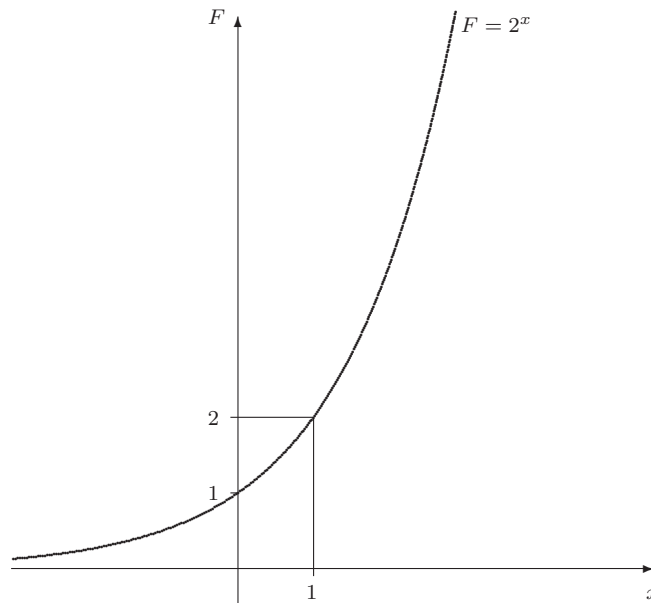
Tage	Fläche der Algen
0	$2^0 \text{ cm}^2 = 1 \text{ cm}^2$
$\frac{1}{2}$	$2^{\frac{1}{2}} \text{ cm}^2 = \sqrt{2} \text{ cm}^2$
$\frac{1}{4}$	$2^{\frac{1}{4}} \text{ cm}^2$
1	$2 \text{ cm}^2$

Insgesamt ergibt sich für die Beziehung zwischen der Anzahl der Tage und der Fläche der Algen: Nach  $x$  Tagen ist die Fläche  $2^x \text{ cm}^2$  groß, ( $x \in \mathbb{R}$ ). Dieser Wachstumsprozess läßt sich durch die Exponentialgleichung mit

$$F = 2^x \text{ cm}^2$$

beschreiben, wobei  $x$  die Zahl der Tage und  $F$  die Algenfläche ist.

Grafisch läßt sich der Zusammenhang von  $x$  und  $F$  wie folgt veranschaulichen:



### Beispiel 2

Jetzt kommen wir zu dem bereits angekündigten Beispiel des Zinseszinses. Wenn ein Kapital  $K_0$  zum Zinssatz  $i$  angelegt wird (Beispiel:  $i = 5\% = 0,05$ ), dann beträgt das Kapital nach einem Jahr

$$K_1 = K_0 + i \cdot K_0 = K_0 \cdot (1 + i)$$

Nach einem weiteren Jahr beträgt es

$$K_2 = K_1 + i \cdot K_1 = K_1 \cdot (1 + i) = K_0 \cdot (1 + i)^2 \quad ,$$

und allgemein gilt für das Kapital nach  $n$  Jahren die Exponentialgleichung

$$K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n \quad .$$

Wenn allerdings die Zinsen nur jährlich gutgeschrieben werden, dürfen wir für  $n$  nur ganze Zahlen einsetzen. Die Zahl  $n$  darf dabei durchaus negativ sein; man fragt dann nach dem Kapital, daß vor einer bestimmten Zahl von Jahren vorhanden war, wenn das Kapital heute  $K_0$  beträgt.

Oft wird als Basis die sogenannte Eulersche Zahl  $e$  ( $e \approx 2,7183$ ) gewählt. Der Grund hierfür liegt in erheblichen Rechenvereinfachungen in der Differentialrechnung. Wir können im Rahmen dieses Kurses darauf nicht weiter eingehen.

Eulersche Zahl  $e$

### Aufgabe 43

Zum Zeitpunkt  $n = 0$  beträgt das Guthaben auf einem Sparkonto 1.212,75 €. Der Zinssatz ist 5%. Wie groß war das Guthaben vor zwei Jahren, wenn keine Einzahlungen oder Abhebungen vorgenommen wurden? Wie groß wird es in drei Jahren sein?

### Aufgabe 44

Das Müllaufkommen einer Stadt steige jährlich um einen festen Prozentsatz. In zwei Jahren ist die Müllmenge um 8,16 % gestiegen. Wie groß ist die jährliche prozentuale Zunahme des Müllaufkommens?

### Aufgabe 45

In einem Labor ist eine Bakterienkultur angelegt worden. Diese Kultur verdreifacht ihre Masse jede Stunde.

- (a) Angenommen die Kultur hat zur Zeit die Masse 1 g.

Welche Masse hat sie nach 1 Stunde, 2 Stunden, 3 Stunden und nach 0.5 Stunden ?

Stellen Sie diese Werte in einer Wertetabelle zusammen.

Geben Sie eine Exponentialgleichung an, die dieses Wachstum beschreibt .

- (b) Nehmen Sie jetzt an, daß die Kultur zur Zeit die Masse 2 g hat.

Wie lautet die Exponentialgleichung, die dieses Wachstum beschreibt ?

Verallgemeinern Sie diese Exponentialgleichung für eine Anfangsmasse  $A_0$ .

- (c) Nehmen Sie nun an, die Kultur verdreifacht ihre Anfangsmasse 1 g nur alle 10 Stunden.

Wie lautet in diesem Fall die Exponentialgleichung ?

Es gibt auch Situationen, in denen die Basis kleiner als 1 sein kann. Nehmen Sie beispielsweise an, ein Gebrauchtwagen habe einen Wert von 10.000 € und verliere pro Jahr 20% seines Wertes. Dann kann der Wert nach  $x$  Jahren beschrieben werden durch

$$W(x) = 10.000 e \cdot 0,8^x \quad .$$

Nach einem Jahr beträgt der Wert also 8.000 €, nach zwei Jahren 6.400 €. Auch das Einsetzen negativer Werte für  $x$  ist sinnvoll: Vor einem Jahr betrug der Wert  $10.000 € \cdot 0,8^{-1} = 12.500 €$ .

### Aufgabe 46

Die Intensität  $I$  des Tageslichtes nimmt in einem Meer alle 5 m um 50% ab. Ist es dann noch möglich, mit einer Unterwasserkamera, die 65% des Tageslichts  $I$  braucht, in einer Tiefe  $s$  von 3 m gute Aufnahmen zu machen ?

## 2.3 Logarithmen

Häufig kommt es vor, daß in einer Exponentialgleichung wie  $F = 2^x \text{ cm}^2$  der Wert für  $F$  vorgegeben und nach dem Exponenten gefragt wird. Die Frage lautet dann: Wie lange dauert es, bis eine bestimmte vorgegebene Fläche (z. B.  $100 \text{ cm}^2$ ) bedeckt ist?

Dieses Problem löst man mit Hilfe von Logarithmen. Unter dem Logarithmus einer positiven Zahl  $a$  zur Basis  $b$  ( $\log_b a$ ) versteht man diejenige Zahl  $x$ , für die  $b^x = a$  ist. Dabei ist auch  $b$  stets eine positive Zahl.

Beispielsweise ist  $\log_2 8 = 3$ , denn  $2^3 = 8$ . Es ist  $\log_4 \frac{1}{16} = -2$ , denn  $4^{-2} = \frac{1}{16}$ .

$b^x = a$ $x = \log_b a$
--------------------------

### Aufgabe 47

Berechnen Sie

(a)  $\log_3 9 =$

(b)  $\log_{13} 169 =$

(c)  $\log_3 \frac{1}{9} =$

(d)  $\log_5 1 =$

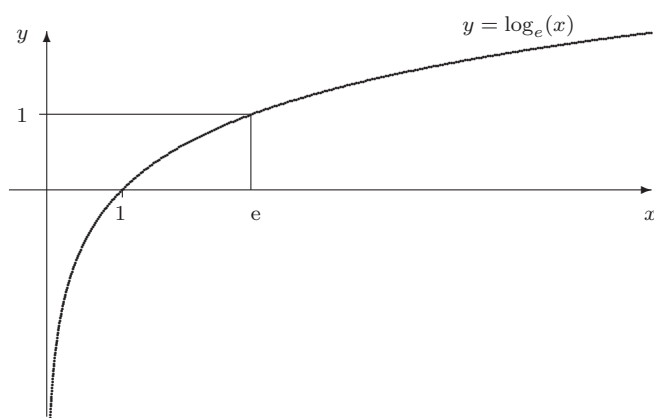
(e)  $\log_7 7^{51} =$

**Aufgabe 48**

Lösen Sie nach  $x$  auf bzw. berechnen Sie:

- a)  $2^x = 64$
- b)  $2 \cdot 3^x = 162$
- c)  $25^x + 19 = 24$
- d)  $\log_5 x = 4$
- e)  $\log_{0,5} x = 3$
- f)  $\log_{\frac{1}{4}} x = -5$
- g)  $\log_x 16 = 4$
- h)  $\log_x \frac{1}{8} = -3$
- i)  $\log_x 625 = 4$

Die folgende Grafik veranschaulicht den Zusammenhang zwischen einer Zahl  $x$  und ihrem Logarithmus zur Basis  $e$ :



Für jede Logarithmusfunktion gelten die folgenden Beziehungen mit  $u, v \in \mathbb{R}^+$ ,  $r \in \mathbb{R}$  und  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ :

$$\begin{aligned}\log_a(u \cdot v) &= \log_a u + \log_a v \\ \log_a \frac{u}{v} &= \log_a u - \log_a v \\ \log_a u^r &= r \cdot \log_a u\end{aligned}$$

Rechenregeln für Logarithmen



**Aufgabe 49**

Vereinfachen Sie

(a)  $\log_a 2 + \log_a 3 =$

(b)  $\log_a 12 - \log_a 3 =$

(c)  $\log_a 7 + 2 \log_a 13 - \log_a 91 =$

d)  $4 \log_2 5 - 3 \log_2 2 + \log_2 7 =$

e)  $6 \log_a u - (\log_a v + \log_a w) =$   
 $a, u, v, w$  positiv,  $a \neq 1$

f)  $a \ln x - \frac{1}{b} \ln y + c \ln z =$   
 $x, y, z$  positiv,  $a, b, c \in \mathbb{N}$

Bei der Berechnung von Logarithmuswerten mit einem Taschenrechner fällt auf, daß dieser in der Regel mit zwei Logarithmusfunktionen,  $\lg$  und  $\ln$  arbeitet.

$\lg$  bezeichnet den Logarithmus zur Basis 10 und  $\ln$  den Logarithmus zur Basis  $e$ .

Werte von Logarithmen zu anderen Basen können wir mit Hilfe der folgenden Formel berechnen:

„Umrechnungsformel“  
für Logarithmen

Für alle  $x \in \mathbb{R}^+$  und  $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  gilt:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

Den Wert  $\log_8 164$  können wir folgendermaßen berechnen:

$$\log_8 164 = \frac{\lg 164}{\lg 8} \approx 2.453$$

oder

$$\log_8 164 = \frac{\ln 164}{\ln 8} \approx 2.453$$

**Aufgabe 50**

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Taschenrechners (auf 4 Stellen nach dem Komma genau)

(a)  $\log_2 17 =$

(b)  $\log_{\frac{2}{3}} 13 =$

(c)  $\log_4 \frac{5}{7} =$

**Aufgabe 51**

Das Müllaufkommen einer Stadt wachse jährlich um 4 %. Nach wieviel Jahren hat es sich verdoppelt?

**Aufgabe 52**

- a) Lösen Sie die Formel  $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n$  nach  $n$  auf.
- b) Ein Kapital  $K_0 = 8.000\text{€}$  werde zu einem Zinssatz von  $i = 0,07$  angelegt. Nach wieviel Jahren ist es auf  $11.220,41\text{€}$  angewachsen?

**2.4 Lösen von Exponentialgleichungen**

Gleichungen, bei denen die Variable im Exponenten erscheint, heißen Exponentialgleichungen. In einfachen Fällen kann man diese exakt lösen.

**1. Beispiel:**

$$\begin{aligned} -25 + 11 \cdot 5^x &= 3 \cdot 5^x + 975 \\ \Leftrightarrow 8 \cdot 5^x &= 1000 \\ \Leftrightarrow 5^x &= 125 \\ \Leftrightarrow x &= \log_5 125 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

**2. Beispiel:**

$$\begin{aligned} 3^{3x} &= 27 \cdot 3^{x+5} \\ \Leftrightarrow 3^{3x} &= 3^3 \cdot 3^{x+5} \\ \Leftrightarrow 3^{3x} &= 3^{x+8} \end{aligned}$$

Da die Basen gleich sind, folgt

$$\begin{aligned} 3x &= x + 8 \\ \Leftrightarrow 2x &= 8 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \end{aligned}$$

**3. Beispiel**

$$6^{x+3} = 11 \cdot 3^{2x}$$

Beide Seiten sind positiv. Logarithmiert man beide Seiten, so sind diese Zahlen auch gleich:

$$\begin{aligned} \lg 6^{x+3} &= \lg(11 \cdot 3^{2x}) \\ \Leftrightarrow (x+3) \lg 6 &= \lg 11 + 2x \lg 3 \\ \Leftrightarrow x \lg 6 + 3 \lg 6 &= \lg 11 + 2x \lg 3 \\ \Leftrightarrow x \lg 6 - 2x \lg 3 &= \lg 11 - 3 \lg 6 \\ \Leftrightarrow x(\lg 6 - 2 \lg 3) &= \lg 11 - 3 \lg 6 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\lg 11 - 3 \cdot \lg 6}{\lg 6 - 2 \cdot \lg 3} = \frac{\lg \frac{11}{6^3}}{\lg \frac{6}{9}} = \frac{\lg \frac{11}{6^3}}{\lg \frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Mit dem Taschenrechner kann der Wert ermittelt werden.

**Aufgabe 53**

Bestimmen Sie die Lösungen:

a)  $3 \cdot 5^x - 9375 = 0$

b)  $5 \cdot 4^x + 3050 = 17 \cdot 4^x - 22$

c)  $7^{x-5} = 7^{5-x}$

d)  $7^{3x+1} = 5 \cdot 3^{x-3}$

Schwierigere Aufgaben:

Für welche reellen  $x$  gelten die folgenden Gleichungen?

e)  $x^{\lg x} = 1$

f)  $x^{\lg x} = x$

g)  $x^x = x \quad (x > 0)$

h) Wo ist der Fehler?

Einer rechnet:

$$\text{Aus } \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^x \text{ folgt } 4^{3+x} = 5^{3+x}$$

$$\Rightarrow 4 = 5$$

## 2.5 Trigonometrie

*Gegenstand dieses letzten Kapitels ist die Anwendung von Sätzen, die in allgemeinen Dreiecken und insbesondere in rechtwinkligen Dreiecken gelten. Zu den wichtigsten Sätzen zählen der Satz des Pythagoras, der Sinus- und der Kosinussatz. Die zuletzt genannten beiden Sätze basieren auf den Winkelfunktionen Sinus und Cosinus.*

Zunächst möchten wir an einem Beispiel eine Anwendung von Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck demonstrieren:

**Problem:**

Auf einer Geburtstagsfeier soll mit Sekt angestoßen werden. Die Gastgeber überlegen, ob sie für insgesamt acht Personen mit *e i n e r* Flasche Sekt hinkommen, wenn man von einem Inhalt von 0,7 l ausgeht, oder ob sie zwei Sektf Flaschen besorgen müssen.

Sie möchten also wissen, ob der Sekt im Glas noch hoch genug steht, wenn sie den Sekt einer Flasche an alle Personen gleichmäßig aufteilen. Am Glasrand läßt sich ein Durchmesser von 7 cm und im Glasinnern eine Höhe von 13 cm abmessen.

**Frage:** Wie läßt sich das Problem lösen?

Haben Sie eine Idee? Hier ist etwas Platz zum Probieren.

**Lösung:**

Als erstes können wir schnell berechnen, wieviel Sekt jeder Teilnehmer der Geburtstagsfeier bekommen würde:

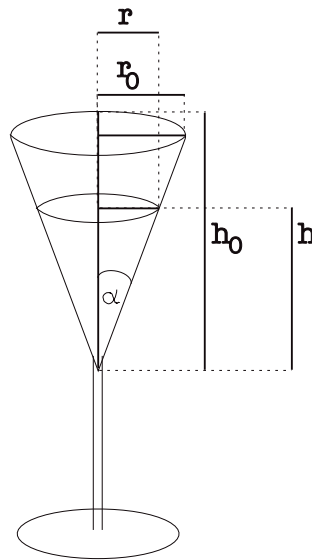
$$\text{Es sind } 0,7 \text{ l} = 700 \text{ ml}; 700 \text{ ml} : 8 = 87,5 \text{ ml} = 87,5 \text{ cm}^3$$

Weiter gilt für die Berechnung des Volumens eines geraden Kegels:

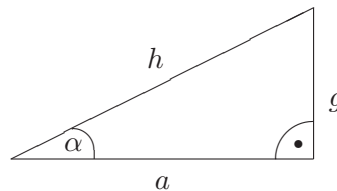
$V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ . Mit  $h$  können wir berechnen, wie hoch der Sekt im Sektspitz stehen würde.

In dieser Gleichung kommt aber noch eine weitere „Unbekannte“ vor ( $r$ ), so daß wir an dieser Stelle noch nicht die gewünschte Lösung ablesen können.

Mit den Abmessungen des Glasinnern ist aber ein Seitenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck gegeben:



Wir erinnern zunächst an die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck:



In einem rechtwinkligen Dreieck hängen die Verhältnisse der Seitenlängen zueinander ausschließlich vom Winkel  $\alpha$  ab. Das Verhältnis  $\frac{g}{h}$  wird als Sinus von  $\alpha$  (Schreibweise:  $\sin \alpha$ ) bezeichnet („Gegenkathete durch Hypotenuse“), das Verhältnis  $\frac{a}{h}$  als Cosinus von  $\alpha$  ( $\cos \alpha$ , „Ankathete durch Hypotenuse“), das Verhältnis  $\frac{g}{a}$  als Tangens von  $\alpha$  ( $\tan \alpha$ ) und das Verhältnis  $\frac{a}{g}$  als Cotangens von  $\alpha$  ( $\cot \alpha$ ). Die jeweiligen Werte können Tabellen entnommen oder mit Hilfe eines Taschenrechners ermittelt werden.

Sinus

Cosinus

Tangens

Cotangens

Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\sin\alpha = \frac{g}{h}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{h}$$

$$\tan\alpha = \frac{g}{a}$$

$$\cot\alpha = \frac{a}{g};$$

es gilt folgende Entsprechung:

$a \hat{=}$  Länge der Ankathete,

$g \hat{=}$  Länge der Gegenkathete,

$h \hat{=}$  Länge der Hypotenuse

Nun sind die für die Problemlösung erforderlichen Definitionen bereitgestellt. Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\tan \alpha = \frac{r_0}{h_0} \quad / \text{ und es gilt :}$$

$$\tan \alpha = \frac{r}{h}$$

$$\implies r = \tan \alpha \cdot h$$

$$\implies \frac{r_0}{h_0} = \frac{r}{h}$$

$$\iff r = \frac{r_0}{h_0} \cdot h$$

$$\implies V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

$$\implies V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{r_0}{h_0} \cdot h\right)^2 \cdot h$$

$$\implies V_{\text{Kegel}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{r_0^2}{h_0^2} \cdot h^3$$

$$\implies h^3 = \frac{3 \cdot V_{\text{Kegel}} \cdot h_0^2}{\pi \cdot r_0^2}$$

$$\implies h = \sqrt[3]{3 \cdot \frac{V_{\text{Kegel}} \cdot h_0^2}{\pi \cdot r_0^2}}$$

$$\implies h = \sqrt[3]{3 \cdot \frac{87,5\text{cm}^3 \cdot (13\text{cm})^2}{\pi \cdot (3,5\text{cm})^2}}$$

$$\implies h = \sqrt[3]{3 \cdot \frac{87,5\text{cm}^3 \cdot 169\text{cm}^2}{\pi \cdot 12,25\text{cm}^2}}$$

$$\implies h \approx 10,5\text{cm}$$

**Antwort:** Mit einer Höhe von gut 10 cm mag die Sekthöhe auch „für das Auge“ ausreichen, um auf der Geburtstagsfeier anzustoßen.

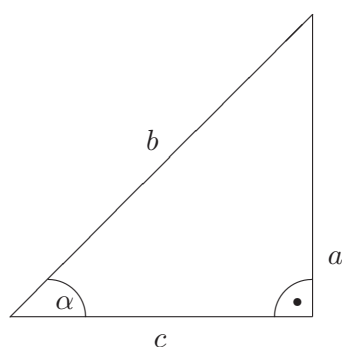
Einige konkrete Werte von Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens lassen sich auch ohne Tabellen und ohne Taschenrechner ermitteln!

**Aufgabe:** Ermitteln Sie doch einmal den  $\tan 45^\circ$ .  
(Tip: Betrachten Sie ein geeignetes Dreieck!)

Probieren Sie es doch gleich einmal!

**Lösung:**

Dazu betrachten wir ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck.



Es gilt:  $\alpha = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$  und  $c = a$

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{a} = 1$$

#### Aufgabe 54

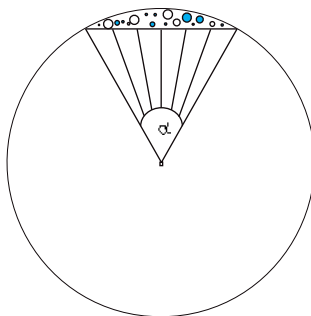
Wir haben  $\tan 45^\circ$  (ohne Taschenrechner oder entsprechende Hilfsmittel) bestimmt. Ermitteln Sie  $\sin 30^\circ$  ebenfalls ohne Taschenrechner.

Tip: Betrachten Sie ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1.

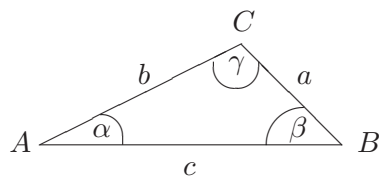
#### Aufgabe 55

Leiten Sie die folgende Formel für den Flächeninhalt des gemusterten Kreisabschnittes her:

$$A = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} - r^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$



Für beliebige Dreiecke gelten die folgenden beiden Sätze:



### Sinussatz

In einem beliebigen Dreieck gilt:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b}{c}$$

Sinussatz

### Kosinussatz

In einem beliebigen Dreieck gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Kosinussatz

Als Spezialfall des Kosinussatzes ergibt sich für ein rechtwinkliges Dreieck der Satz des Pythagoras:

### „Satz des Pythagoras“

In einem rechtwinkligen Dreieck mit den Seitenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$  ( $c$  sei die Hypotenuse) gilt:

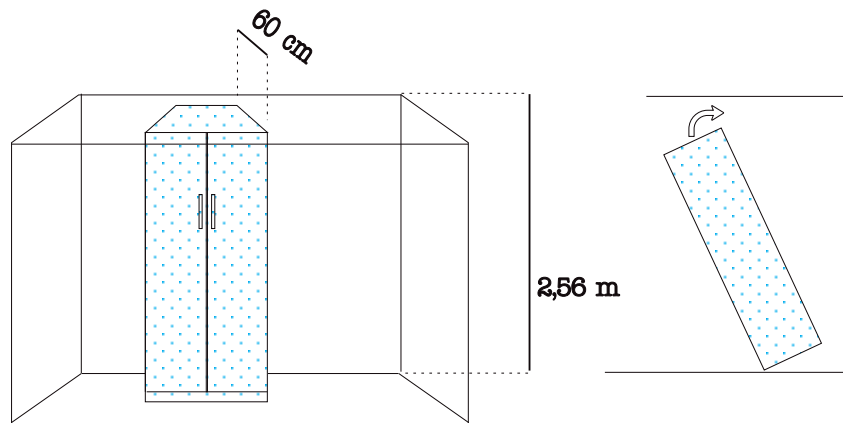
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Satz  
des Pythagoras



**Problem**

Für einen Raum mit einer Deckenhöhe von 2,56 m soll ein Kleiderschrank angefertigt werden. Bedingt durch die räumlichen Vorgaben soll der Schrank genau 60 cm tief sein (seine Breite beträgt mehr als 60 cm!). Um nun den größtmöglichen Stauraum zu erzielen, sollte der Schrank möglichst hoch sein. Wie hoch darf er aber höchstens sein, damit er sich im Raum noch aufrichten läßt, wenn er vollständig zusammengebaut ist?

**Lösung**

Offensichtlich darf die Diagonale im abgebildeten Querschnitt des Schrankes eine Länge von  $d=2,56$  m nicht übersteigen (siehe Abbildung unten). Die Tiefe des Schrankes beträgt  $b=60$  cm = 0,6 m. Dann läßt sich die Schrankhöhe  $h$  mit Hilfe des Pythagoras errechnen.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\Leftrightarrow d^2 = b^2 + h^2$$

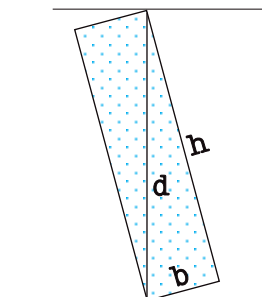
$$\Leftrightarrow h^2 = d^2 - b^2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{d^2 - b^2} \quad / \quad d = 2,56\text{m}, \quad b = 0,6\text{m}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{2,56^2\text{m}^2 - 0,6^2\text{m}^2}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{6,5536\text{m}^2 - 0,36\text{m}^2}$$

$$\Rightarrow h \approx 2,48\text{m}$$

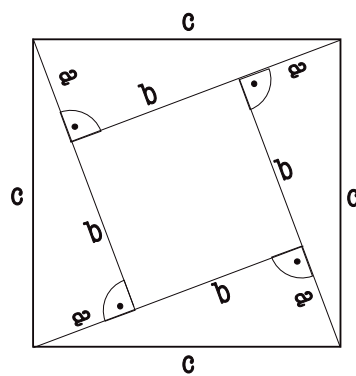


**Aufgabe 56**

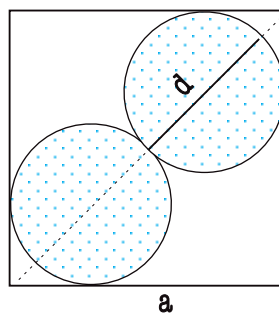
Der Satz des Pythagoras folgt aus dem Kosinussatz! Warum?

**Aufgabe 57**

Wenn Sie den Flächeninhalt des unten abgebildeten Quadrates mit der Seitenlänge  $c$  als Summe der Teilflächen ausdrücken, gelangen Sie zu einem verblüffenden Ergebnis.

**Aufgabe 58**

In ein Quadrat der Seitenlänge  $a$  sollen zwei gleich große Kreise mit möglichst großem Flächeninhalt eingeschrieben werden. Wie groß ist ihr Radius?



**Aufgabe 59**

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Gleichung!

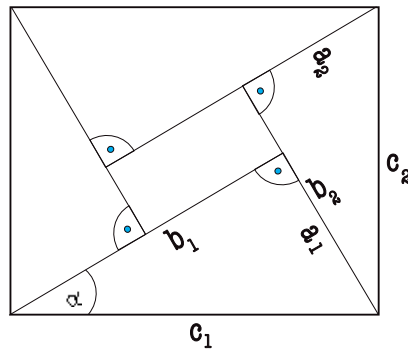
$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

Anleitung: Betrachten Sie dazu das rechtwinklige Dreieck auf Seite 52 und setzen Sie  $h = 1$ . Wenden Sie den Satz des Pythagoras auf dieses Dreieck an und formulieren Sie den Sinus und Cosinus für  $\alpha$ .

**Aufgabe 60**

Zeigen Sie, daß der Flächeninhalt des unten abgebildeten Rechtecks gleich dem Produkt aus  $c_1$  und  $c_2$  ist, indem Sie die Summe der Flächeninhalte der Teilflächen bilden.

Hinweis: Es ist der „trigonometrische Pythagoras“ anzuwenden.

**Aufgabe 61**

In einem beliebigen Dreieck sind die folgenden Größen gegeben:

- (a)  $b = 161\text{m}$ ,  $c = 117\text{m}$ ,  $\gamma = 28,1^\circ$
- (b)  $a = 301\text{mm}$ ,  $b = 402\text{mm}$ ,  $c = 512\text{mm}$ .

Berechnen Sie bitte die übrigen Stücke.

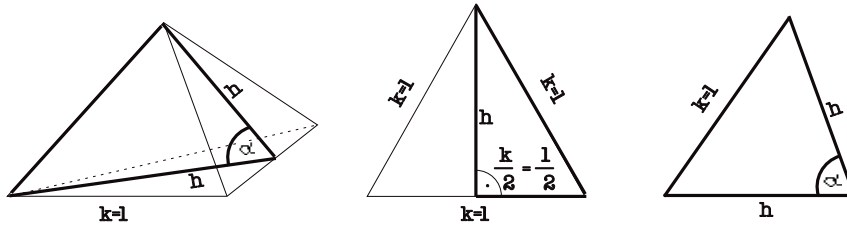
**Aufgabe**

Bestimmen Sie den Winkel, den zwei aneinandergrenzende Seitenflächen eines Tetraeders einschließen.

Tip: Gehen Sie von einem Tetraeder mit der Kantenlänge 1 aus.

**Lösung**

Ein Tetraeder ist ein Körper, der von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird. Wir veranschaulichen uns die gestellte Aufgabe zunächst in einer Skizze, der zu berechnende Winkel  $\alpha$  ist eingezeichnet. (linkes Bild). Um die Größe des Winkels  $\alpha$  berechnen zu können, benötigen wir zunächst die Höhe  $h$  (mittleres Bild).



Unter Berücksichtigung des „Tips“, als Kantenlänge 1 zu wählen, gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$h^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = k^2$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{3}{4}k^2$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2}\sqrt{3}k \quad / k = 1$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Nun können wir  $\alpha$  mit Hilfe des Kosinussatzes berechnen (rechtes Bild):

$$k^2 = h^2 + h^2 - 2 \cdot h \cdot h \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow k^2 = 2h^2 - 2h^2 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow k^2 = 2h^2(1 - \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{k^2}{2h^2} \quad / k = 1, h = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 1 - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha \approx 70,53^\circ$$

**Antwort:** Zwei aneinandergrenzende Seitenflächen eines Tetraeders schließen also einen Winkel von  $70,53^\circ$  ein.



## Lösungen der Übungsaufgaben

### Aufgabe 1

Die folgenden Behauptungen sind wahr:

- a)  $1 \in T_{156}$   
 c) und  $14 \notin T_{156}$ .

### Aufgabe 2

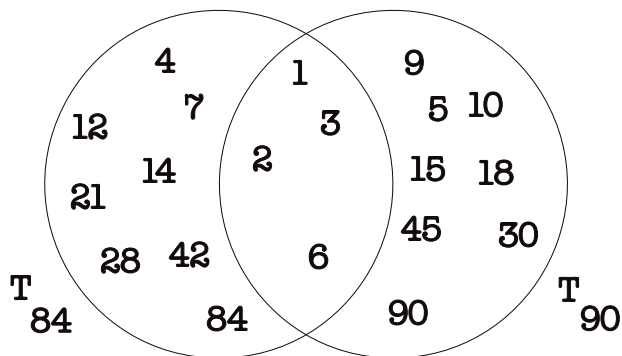


Abb. Veranschaulichung im Mengendiagramm

### Aufgabe 3

- a)  $T_{84} \cap T_{90} = \{ 1, 2, 3, 6 \}$   
 b)  $T_{90} \setminus T_{84} = \{ 5, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90 \}$

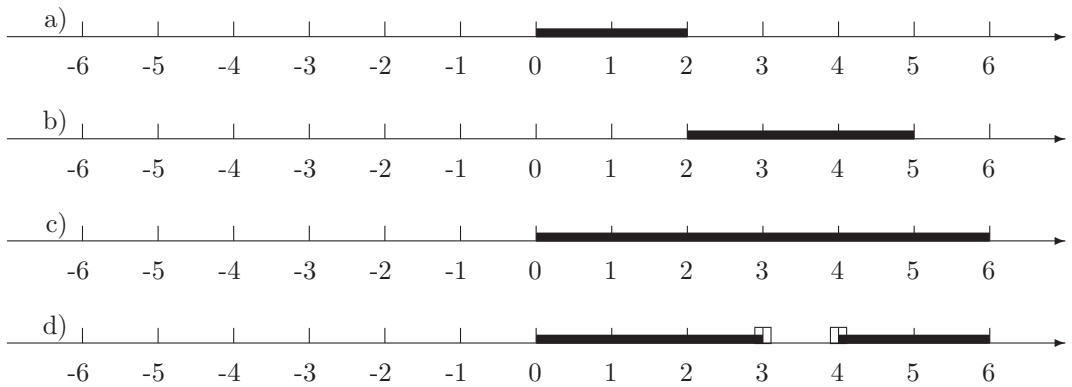
### Aufgabe 4

- a)  $(T_{84} \cap T_{90}) \setminus \{ 1, 4, 13 \}$   
 $= \{ 1, 2, 3, 6 \} \setminus \{ 1, 4, 13 \}$   
 $= \{ 2, 3, 6 \}$
- b)  $(T_{84} \cup T_{90}) \cap \{ 1, 4, 13 \}$   
 $= \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 21, 28, 30, 42, 45, 84, 90 \} \cap \{ 1, 4, 13 \}$   
 $= \{ 1, 4 \}$
- c)  $T_{90} \cap (T_{84} \cup T_{90})$   
 $= T_{90} = \{ 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90 \}$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } & ((T_{84} \setminus T_{90}) \cup (T_{90} \setminus T_{84})) \cap T_{70} \\
 &= (\{4, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\} \cup \{5, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90\}) \cap \\
 & \quad \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\} \\
 &= \{4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 21, 28, 30, 42, 45, 84, 90\} \cap \\
 & \quad \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\} \\
 &= \{5, 7, 10, 14\}
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 5**

- a)  $A_1 = \{1, 2, 3\}$   
 b)  $A_2 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$   
 c)  $A_3 = \{4, 5\}$   
 d)  $A_4 = \{3\}$

**Aufgabe 6****Aufgabe 7**

- a)  $3 \in \mathbb{Q}$  (**wahr**),  
 b)  $3 \in [-5, 2]$  (**falsch**),  
 c)  $3 \in (0, 4)$  (**wahr**),  
 d)  $3 \in [-1, 3]$  (**wahr**),  
 e)  $3 \in [-1, 3)$  (**falsch**),  
 f)  $3 \in (-1, 3]$  (**wahr**),  
 g)  $3 \in [1, 4] \cap [2, 5]$  (**wahr**),  
 h)  $3 \in [1, 2] \cap [3, 4]$  (**falsch**),  
 i)  $3 \in [1, 2] \cup [3, 4]$  (**wahr**),  
 j)  $3 \in [1, 2] \setminus [3, 4]$  (**falsch**),  
 k)  $[1, 2] \setminus [3, 4] = \{\}$  (**falsch**),  
 l)  $[1, 3] \subset [0, 6]$  (**wahr**),  
 m)  $[2, 3] \subset (2, 5)$  (**falsch**),  
 n)  $[2, 4] \cap [3, 5] \subset [2, 5]$  (**wahr**),

**Aufgabe 8**

- a)  $3m + 7, 2n$
- b)  $8a + 4b$
- c)  $x^3 + 3x^2y$
- d)  $12, 5p^2 + 35p$
- e)  $40x^3 + 10x^3z$
- f)  $10x + 5y + 8z + xy$

**Aufgabe 9**

- a)  $7x \cdot (a + 2b)$
- b)  $2ab \cdot (3a + 4b)$
- c)  $6x^2y^2(4x + 3)$
- d)  $13x \cdot (3a^2x + 5b^2 + 7x^2)$
- e)  $0, 14r(s + 3r + 2s^2)$

**Aufgabe 10**

- a)  $a^2 - 4ac$
- b)  $15bx - 3b^2 + 12b$
- c)  $-9acx + 9axy + 15ax$
- d)  $-3a^2x^2 + 3acx - 4axy$
- e)  $-5c^2 + 7ac - 4cx$
- f)  $20defg - 18d^2f - 6d^2ef$

**Aufgabe 11**

- a)  $2ef(2d - 5e)$
- b)  $4def(5d - 4e)$
- c)  $5e(4f^2 + 1 + 3dg)$
- d)  $5c(4 - 5b^2 + 3bc)$
- e)  $6a(6b + 1 + 8ab^2)$
- f)  $12ac(5ab^2 + 3 + 7d^2)$

**Aufgabe 12**

- a)  $-10x + 4y + 6z$
- b)  $21m + 25n - 16z$
- c)  $54p - 15q$
- d)  $-17b + 5c$
- e)  $-3, 6axy$



**Aufgabe 13**

- a)  $(a - b) \cdot (2x + y)$   
 b)  $11x \cdot (y + 3a - 2z)$   
 c)  $(x + y)^2 \cdot (x + y - 1)$   
 d)  $(a + b) \cdot (x + y)$   
 e)  $(z + 5) \cdot (6y^2 + 2)$  bzw.  $(2z + 10) \cdot (3y^2 + 1)$   
 f)  $(b - c) \cdot (b^2 - c^2) = (b - c)^2 \cdot (b + c)$

**Aufgabe 14**

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) \\ &= a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= (a - b) \cdot (a - b) \\ &= a \cdot (a - b) - b \cdot (a - b) \\ &= a^2 - ab - ba + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot (a - b) &= a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b) \\ &= a^2 - ab + ba - b^2 \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

**Aufgabe 15**

- a)  $0,3d^2 - 17,9d - 6$   
 b)  $4c^2 + 2c - 2$   
 c)  $-0,1d^2 + 3,9d + 4$   
 d)  $8a^2b^2 + 11,6ab - 0,6$   
 e)  $-0,16a^2b^2 + 0,64ab - 0,6$   
 f)  $-7d^2e^2 + 41de^2g - 30e^2g^2$

**Aufgabe 16**

- a)  $4 - 0,36b^2$   
 b)  $4 + 5,6b + 1,96b^2$   
 c)  $9a^2 - 5,4a + 0,81$   
 d)  $1,44a^2 - 0,48ad + 0,04d^2$   
 e)  $0,25a^2 + 0,2ay + 0,04y^2$

**Aufgabe 17**

- a)  $(7a + 3y)^2$
- b)  $(0,8a + 2c)(0,8a - 2c)$
- c)  $(6a - 1,4d)(6a + 1,4d)$
- d)  $(4a - 9cy)^2$
- e)  $(0,3d + 0,9g)(0,3d - 0,9g)$
- f)  $(3de + 7g)^2$

**Aufgabe 18**

- a)  $(d - 6g)^2 = d^2 - 12dg + 36g^2$
- b)  $(3a + 4c)^2 = 9a^2 + 24ac + 16c^2$
- c)  $(a + 5)^2 = a^2 + 10a + 25$
- d)  $(7d - 9e)^2 = 49d^2 - 126de + 81e^2$
- e)  $(d - 3e)^2 = d^2 - 6de + 9e^2$
- f)  $(2d - 0,8e)^2 = 4d^2 - 3,2de + 0,64e^2$

**Aufgabe 19**

- a)  $\frac{10ab}{12b}$
- b)  $\frac{7y}{7xy}$
- c)  $\frac{x-1}{x^2-1}$
- d)  $\frac{8a^2-18b^2}{2(2a-3b)^2}$
- e)  $\frac{-1}{-7}$
- f)  $\frac{z^2-18z+81}{9z-81}$
- g)  $\frac{-x^2+3xy-2y^2}{x^2-2xy+y^2}$

**Aufgabe 20**

- a)  $\frac{2}{3}$
- b)  $\frac{3a}{b}$
- c)  $5x - 8y$
- d)  $\frac{25a^2-49b^2}{5a+7b} = \frac{5^2a^2-7^2b^2}{5a+7b} = \frac{(5a)^2-(7b)^2}{5a+7b} \stackrel{(3.Binom)}{=} \frac{(5a+7b) \cdot (5a-7b)}{(5a+7b)} = 5a - 7b$
- e)  $-\frac{5a+7b}{3}$
- f)  $\frac{-a}{2}$
- g)  $9(3x - 2z)$
- h)  $\frac{9x-4y}{45x+28y}$

**Aufgabe 21**

- a)  $\frac{3}{a}$   
 b)  $\frac{16a^2-9b^2}{12ab}$   
 c)  $\frac{x-y}{x+y}$   
 d)  $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$   
 e)  $\frac{x^2-2xy-y^2}{x^2-y^2}$   
 f)  $\frac{c^3+d^3}{3c^2d^2}$   
 g)  $\frac{2a^2+2ab+3b^2}{144(a^2-b^2)}$

**Aufgabe 22**

- a) 10  
 b)  $\frac{27}{16}$   
 c)  $\frac{(12a+9b) \cdot (8a-6b)}{(4a+3b) \cdot (4a-3b)} = \frac{3 \cdot (4a+3b) \cdot 2 \cdot (4a-3b)}{(4a+3b) \cdot (4a-3b)} = 3 \cdot 2 = 6$   
 d)  $\frac{5x}{7y}$   
 e)  $\frac{(18a^2-50b^2) \cdot (3a^2-108b^2)}{(3a-5b) \cdot (a+6b)} = \frac{(18a^2+30ab-30ab-50b^2) \cdot (3a^2+18ab-18ab-108b^2)}{(3a-5b) \cdot (a+6b)}$   
 $= \frac{(6a+10b) \cdot (3a-5b) \cdot (3a-18b) \cdot (a+6b)}{(3a-5b) \cdot (a+6b)} = \frac{2(3a+5b) \cdot 3(a-6b)}{1} = 6(3a^2-13ab-30b^2)$   
 f)  $3ac$   
 g) 1

**Aufgabe 23**

- a)  $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{5}{6}, a_3 = \frac{7}{6}, a_4 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}, a_5 = \frac{11}{6}$   
 b)  $S_5 = \frac{35}{6}$

**Aufgabe 24**

- a)  $x_1 = 1, x_2 = 2$   
 b)  $x_1 = 1, x_2 = -3$   
 c)  $x_1 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}, x_2 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$   
 d)  $x_1 = 2, x_2 = -1$   
 e)  $x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = -\frac{5}{3}$   
 f) Diese Gleichung hat keine (reelle) Lösung.  
 g)  $x = 3$

**Aufgabe 25**

- a)  $x_1 = -5, x_2 = -7$
- b)  $x_1 = 5, x_2 = 13$
- c) Diese Gleichung hat keine (reelle) Lösung.
- d) Diese Gleichung hat keine (reelle) Lösung.
- e)  $x = -9$
- f)  $x_1 = -8, x_2 = -4$
- g)  $x_1 = 3, x_2 = 6$
- h)  $x_1 = 5, x_2 = 8$
- i) Diese Gleichung hat keine (reelle) Lösung.
- j)  $x_1 = -10, x_2 = -7$
- k)  $x_1 = -9, x_2 = -8$
- l)  $x_1 = -9, x_2 = -6$

**Aufgabe 26**

- a) Die Gleichung hat keine Lösung, wenn  $-\sqrt{8} < m < \sqrt{8}$  gilt und genau eine Lösung, wenn  $m = \sqrt{8}$  oder  $m = -\sqrt{8}$  ist. In den anderen Fällen gibt es zwei Lösungen (Anmerkung: Es ist  $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ).
- b)  $x = 0$ ; es gibt keine weiteren (reellen) Lösungen.
- c) Wir erhalten  $z_1 = 9$  und  $z_2 = 4$ , so daß es vier Lösungen gibt:  $x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = 2$  und  $x_4 = -2$ .
- d)  $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3, x_4 = 2$  und  $x_5 = -2$ .

**Aufgabe 27**

$t_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{78}}{4,9}$  s, also  $t_1 \approx 1,26$  s und  $t_2 \approx 4,86$  s.

**Aufgabe 28**

- a)  $S(\frac{3}{4}/\frac{7}{8})$
- b)  $S(-1/17)$

**Aufgabe 29**

- a)  $|-925| = 925$
- b)  $|+23,91| = 23,91$
- c)  $|-17\frac{7}{9}| = 17\frac{7}{9}$

**Aufgabe 30**

- a)  $x = 0$
- b)  $x = +5,1, x = -5,1$
- c)  $x = +\frac{5}{13}, x = -\frac{5}{13}$
- d) Es gibt keine reelle Zahl  $x$ , für die gilt  $|x| = -1$ .
- e)  $x = +1, x = -1$

**Aufgabe 31**

- a)  $x = -1, x = 7$   
 b)  $x = -3, x = -1, x = 1, x = 3$   
 c)  $-2 \leq x \leq -\frac{1}{3}, +\frac{1}{3} \leq x \leq +2$   
 d)  $x = -2, x = 2$

**Aufgabe 32**

$$(-4) + (-6) + (+8) + (+12) = 10$$

**Aufgabe 33**

- a) Die angegebene Gleichung ist nicht allgemeingültig!  
 Gegenbeispiel: Seien  $x := -1$  und  $y := 1$   
 $|x + y| = |(-1) + (+1)| = |0| = 0 < 2 = 1 + 1 = |-1| + |1| = |x| + |y|$
- b) Die angegebene Gleichung ist nicht allgemeingültig!  
 Gegenbeispiel: Seien  $x := -1$  und  $y := 1$   
 $|x - y| = |(-1) - (+1)| = |-2| = 2 > 0 = 1 - 1 = |-1| - |1| = |x| - |y|$
- c) Diese Gleichung ist allgemeingültig.
- d) Unter Beachtung der angegebenen Einschränkung ist diese Aussage allgemeingültig.

**Aufgabe 34**

- a)  $\mathbb{L} = \{x | (x \in \mathbb{R}) \wedge (x < 6)\}$   
 (Angewendete Umformungsregeln: Additionsregel, Zusammenfassen, Multiplikationsregel (1))
- b)  $\mathbb{L} = \{x | (x \in \mathbb{R}) \wedge (x > -5)\}$  (Angewendete Umformungsregeln: Additionsregel, Zusammenfassen, Multiplikationsregel (2))
- c)  $\mathbb{L} = \{r | (r \in \mathbb{R}) \wedge (r > 1)\}$  (Angewendete Umformungsregeln: Additionsregel, Zusammenfassen, Multiplikationsregel (2))
- d)  $\mathbb{L} = \{z | (z \in \mathbb{R}) \wedge (z \geq -1)\}$  (Angewendete Umformungsregeln: Additionsregel, Zusammenfassen, Multiplikationsregel (2))

**Aufgabe 35**

$$\begin{aligned} \frac{x}{100} \cdot 200\text{g} &\geq \frac{25}{100} \cdot 600\text{g} \\ \Rightarrow 2x \text{ g} &\geq 150 \text{ g} & \mathbb{L} = \{x | x \in [0, 100] \wedge x \geq 75\} \\ \Rightarrow x &\geq 75 \end{aligned}$$

**Aufgabe 36**

- a)  $\mathbb{L} = \{x | (x \in \mathbb{R}) \wedge ((x > \frac{3}{2}) \text{ oder } (x < -\frac{3}{2}))\}$
- b)  $\mathbb{L} = \mathbb{R}$
- c)  $\mathbb{L} = \{ \}$
- d)  $\mathbb{L} = \{x | (x \in \mathbb{R}) \wedge ((-4 < x < 1))\}$

**Aufgabe 37**

- (a)  $a^7$
- (b) Dieser Ausdruck läßt sich nicht weiter vereinfachen.
- (c)  $a^{12}$
- (d)  $2 \cdot b^7$
- (e)  $64 \cdot a^3$
- (f)  $9 + 6a + a^2$
- (g)  $\frac{1}{a \cdot b^3}$
- (h)  $a^{\frac{3}{2}}$
- (i)  $a^{-4}$
- (j)  $a^{-\frac{1}{3}}$
- (k) 1
- (l)  $a$

**Aufgabe 38**

- a)  $\frac{1}{81x^2}$
- b)  $\frac{27}{x^{12}y^6}$
- c)  $a + b$
- d)  $a$
- e)  $1 - x^2$

**Aufgabe 39**

- a) Mit  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  erweitert erhält man  $\sqrt{ab}$ .
- b)  $\frac{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}$  ist das Ergebnis nach Erweitern mit  $\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}$ .
- c)  $a + \sqrt{a^2 - b}$  ist der Erweiterungsfaktor und das Ergebnis.

**Aufgabe 40**

- (a) Bei den gegebenen Voraussetzungen müßte es etwa  $\frac{10^{80}}{10^{57}} = 10^{23}$  Sterne geben.
- (b) Da  $8 \cdot 100 \text{ W} + 1,3 \cdot 10^3 \text{ W} + 400 \text{ W} = 2500 \text{ W} = 2,5 \text{ kW}$  gilt, könnten

$$\frac{800 \text{ MW}}{2,5 \text{ kW}} = \frac{800 \cdot 10^6 \text{ W}}{2,5 \cdot 10^3 \text{ W}} = 320 \cdot 10^3 ,$$

also 320 000 Haushalte versorgt werden.

(c)

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \frac{14 \text{ mm}}{2 \text{ ns}} = 7 \cdot \frac{10^{-3} \text{ m}}{10^{-9} \text{ s}} = 7 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 &= 7 \cdot 10^6 \cdot \frac{10^{-3} \text{ km}}{\text{s}} = 7 \cdot 10^3 \frac{\text{km}}{\text{s}} \\
 &= 7 \cdot 10^3 \cdot \frac{\text{km}}{\frac{1}{3.6 \cdot 10^3} \cdot \text{h}} = 252 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{h}} \\
 v_2 &= \frac{6 \text{ mm}}{3 \text{ ps}} = 2 \cdot \frac{10^{-3} \text{ m}}{10^{-12} \text{ s}} = 2 \cdot 10^9 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 &= 2 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-3} \text{ km}}{\text{s}} = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{km}}{\text{s}} \\
 &= 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{\text{km}}{\frac{1}{3.6 \cdot 10^3} \cdot \text{h}} = 72 \cdot 10^8 \frac{\text{km}}{\text{h}} \\
 v_3 &= \frac{4 \text{ Gm}}{200 \text{ s}} = 0.02 \cdot \frac{10^9 \text{ m}}{\text{s}} = 2 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 &= 2 \cdot 10^7 \cdot \frac{10^{-3} \text{ km}}{\text{s}} = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{km}}{\text{s}} \\
 &= 2 \cdot 10^4 \cdot \frac{\text{km}}{\frac{1}{3.6 \cdot 10^3} \cdot \text{h}} = 72 \cdot 10^6 \frac{\text{km}}{\text{h}}
 \end{aligned}$$

In der zweiten Messung liegt ein Meßfehler vor, da die gemessene Geschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit (Die Lichtgeschwindigkeit beträgt etwa  $2.998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) ist.

**Aufgabe 41**

- $\sqrt[3]{8} = 2$
- $\sqrt[6]{3^6} = 3$
- $\sqrt[13]{1,3^{13}} = 1,3$
- $\sqrt[6]{9^3} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{9^3}} = \sqrt[2]{9} = 3$
- $\sqrt[10]{1024} = 2$
- $\sqrt[3]{\sqrt[8]{4^{-8}}} = \sqrt[3]{4^{-1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

**Aufgabe 42**

- $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}$
- $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{5}} = \sqrt[3]{x}$
- $\sqrt[7]{\frac{\sqrt[3]{x^{21}a+x^{21}b}}{\sqrt[3]{a+b}}} = x$

**Aufgabe 43**

Aus  $K_n = 1.212,75 \text{ €} \cdot 1,05^n$  folgt

$$K_{-2} = 1.212,75 \text{ €} \cdot 1,05^{-2} = \frac{1.212,75 \text{ €}}{1,05^2} = 1.100 \text{ €} \quad \text{bzw.}$$

$$K_3 = 1.212,75 \text{ €} \cdot 1,05^3 \approx 1.403,91 \text{ €}.$$

### Aufgabe 44

Wir bezeichnen das Müllaufkommen zum Zeitpunkt  $n = 0$  als  $M_0$  und die jährliche Wachstumsrate (wie beim Zinseszins) als  $i$ . Dann gilt für das Müllaufkommen  $M(n)$  nach  $n$  Jahren  $M(n) = M_0 \cdot (1+i)^n$ . Die im Text gebene Bedingung liefert

$$\begin{aligned} M_0 \cdot (1+i)^2 &= M_0 \cdot 1,0816 \\ \Leftrightarrow (1+i)^2 &= 1,0816 \end{aligned}$$

Da  $(1+i)$  positiv ist, folgt weiter

$$\begin{aligned} (1+i)^2 &= 1,0816 \\ \Leftrightarrow 1+i &= \sqrt{1,0816} \\ \Leftrightarrow i &= 0,04 \end{aligned}$$

Das Müllaufkommen wächst jährlich um 4 Prozent.

### Aufgabe 45

(a) Die Wertetabelle lautet

Zeit	Masse
0 h	1 g
1 h	3 g
2 h	9 g
3 h	27 g
0.5 h	$\approx 1.7$ g

Die Variable  $n$  soll die Anzahl der Stunden angeben, die seit der Anlage der Kultur vergangen sind. Dann lautet die Funktionsgleichung  $m = f(n) = 1 \text{ g} \cdot 3^n$ .

(b) Mit Hilfe der Wertetabelle

Zeit	Masse
0 h	2 g
1 h	6 g = $2 \cdot 3$ g
2 h	18 g = $2 \cdot 9$ g
3 h	54 g = $2 \cdot 27$ g
0.5 h	$\approx 3.4$ g

erhalten wir als Funktionsgleichung  $m = f(n) = 2 \text{ g} \cdot 3^n$ .

Allgemein ergibt sich die Funktionsgleichung  $m = f(n) = A_0 \cdot 3^n$ .

(c) Auch hier hilft eine Wertetabelle

Zeit	Masse
0 h	1 g
10 h	3 g
20 h	9 g
5 h	$\sqrt{3}$ g $\approx 1.7$ g
1 h	$\sqrt[10]{3}$ g $\approx 1.1$ g

Die Funktionsgleichung lautet  $m = f(n) = 1 \text{ g} \cdot (\sqrt[10]{3})^n = 1 \text{ g} \cdot 3^{\frac{n}{10}}$ .



**Aufgabe 46**

Zunächst bestimmen wir mit Hilfe einer Wertetabelle die Funktion  $f$ , die die Abnahme der Lichtintensität  $I$  in Abhängigkeit von der Tiefe  $s$  beschreibt.

Tiefe ( $s$ )	Intensität ( $I$ )
0 m	100 %
5 m	50 %
10 m	25 %
2.5 m	$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 100 \% \approx 70.7 \%$

Als Variable  $x$  wählen wir die Anzahl der Meter. Die Funktionsgleichung lautet  $I = f(x) = 100 \% \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}}$ . Der Funktionswert für  $x = 3$  ist  $I = f(3) = 100 \% \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}} \approx 66 \%$ .

Man kann in der Tiefe von 3 m noch gute Aufnahmen mit der Kamera machen.

**Aufgabe 47**

- (a)  $\log_3 9 = 2$ , denn  $3^2 = 9$ .
- (b)  $\log_{13} 169 = 2$ , denn  $13^2 = 169$ .
- (c)  $\log_3 \frac{1}{9} = -2$ , denn  $3^{-2} = \frac{1}{9}$ .
- (d)  $\log_5 1 = 0$ , denn  $5^0 = 1$ .
- (e)  $\log_7 7^{51} = 51$ , denn  $7^{51} = 7^{51}$ .

**Aufgabe 48**

- a)  $x = \log_2 64 = 6$
- b)  $x = \log_3 81 = 4$
- c)  $x = \log_{25} 5 = 0,5$
- d)  $x = 5^4 = 625$
- e)  $x = 0, 5^3 = \frac{1}{8}$
- f)  $x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-5} = 4^5 = 1024$
- g)  $x^4 = 16 \rightarrow x = \sqrt[4]{16} = 2$
- h)  $x^{-3} = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$
- i)  $x^4 = 625 \Rightarrow x = \sqrt[4]{625} = 5$

**Aufgabe 49**

- (a)  $\log_a 2 + \log_a 3 = \log_a 2 \cdot 3 = \log_a 6$
- (b)  $\log_a 12 - \log_a 3 = \log_a \frac{12}{3} = \log_a 4$
- (c)  $\log_a 7 + 2 \cdot \log_a 13 - \log_a 91 = \log_a \frac{7 \cdot 13^2}{91} = \log_a 13$
- d)  $\log_2 \left(\frac{5^4 \cdot 7}{2^3}\right)$
- e)  $\log_a \left(\frac{u^6}{v \cdot w}\right)$
- f)  $\ln \left(\frac{x^a \cdot z^c}{b^y}\right)$

**Aufgabe 50**

- (a)  $\log_2 17 = 4.0875$   
 (b)  $\log_{\frac{2}{3}} 13 = -6.3259$   
 (c)  $\log_4 \frac{5}{7} = -0.2427$

**Aufgabe 51**

Wir bezeichnen das Müllaufkommen zum Zeitpunkt  $n = 0$  mit  $M_0$ . Dann gilt  $2 \cdot M_0 = M_0 \cdot 1,04^n$ , folglich  $2 = 1,04^n$  und  $n = \log_{1,04} 2$ . Dieser Logarithmus läßt sich zum Beispiel berechnen durch

$$n = \log_{1,04} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 1,04} \approx 17,67 \text{ .}$$

Nach 17 Jahren und etwa 8 Monaten hat sich das Müllaufkommen verdoppelt.

**Aufgabe 52**

a)

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 \cdot (1+i)^n \\ \Leftrightarrow \frac{K_n}{K_0} &= (1+i)^n \\ \Leftrightarrow n &= \log_{1+i} \left( \frac{K_n}{K_0} \right) \end{aligned}$$

$$\text{b) } n = \log_{1,07} \left( \frac{11220,41}{8000} \right) = \log_{1,07}(1,40255125) = \frac{\ln 1,40255125}{\ln 1,07} \approx 5.$$

Nach 5 Jahren beträgt das Kapital etwa 11.220,41 €.

**Aufgabe 53**

- a)  $x = 5$   
 b)  $x = 4$   
 c)  $x = 5$   
 d)  $x = \frac{\lg \frac{5}{189}}{\lg \frac{343}{3}}$

Schwierigere Aufgaben:

e)

$$\begin{aligned} \text{Aus } \lg(x^{\lg x}) &= \lg 1 \\ \text{folgt } \lg x \cdot \lg x &= 0, \\ \text{also } x &= 1. \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} \text{Aus } \lg(x^{\lg x}) &= \lg x \\ \text{folgt } (\lg x)^2 &= \lg x. \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat 2 Lösungen:

$$\begin{aligned} \lg x &= 0, \quad \text{also } x = 1 \\ \text{und } \lg x &= 1, \quad \text{also } x = 10 \end{aligned}$$

g)

$$\begin{array}{lcl}
\text{Aus} & \lg(x^x) & = \lg x \\
\text{folgt} & x \lg x & = \lg x \\
\text{folgt} & x \lg x - \lg x & = 0 \\
\text{folgt} & (x-1) \cdot \lg x & = 0 \\
\text{also} & x & = 1.
\end{array}$$

h) Die beiden äquivalenten Gleichungen sind nur für  $x = -3$  erfüllt.  
Dann lautet die 2. Gleichung aber  $4^0 (= 1) = 5^0$ .

### Aufgabe 54

Wir betrachten ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge  $a = 1$ . Aus Symmetriegründen sind auch alle Winkel gleich groß ( $60^\circ$ ). Um einen Winkel von  $30^\circ$  zu erhalten, zerlegen wir das gleichseitige Dreieck in zwei identische rechtwinklige Dreiecke.

Im rechtwinkligen Dreieck gilt nun:

$$\begin{aligned}
\sin 30^\circ &= \frac{\frac{a}{2}}{a} & / a = 1 \\
\implies \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \\
\implies \sin 30^\circ &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

### Aufgabe 55

Für den Flächeninhalt des Kreisausschnittes gilt:

$$A_{\text{Kreisaus}} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks  $A_{\text{Dreieck}} = A_{\text{Kreisaus}} - A$  läßt sich berechnen. Dazu zerlegen wir das gleichschenklige Dreieck in zwei flächengleiche rechtwinklige Dreiecke, in denen der Winkel  $\frac{\alpha}{2}$  vorkommt.

In dem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse gleich  $r$ . Die dem Winkel  $\frac{\alpha}{2}$  gegenüberliegende Kathete bezeichnen wir mit  $x$ , die andere mit  $y$ .

Für den Flächeninhalt des Dreiecks  $A_{\text{Dreieck}}$  gilt:

$$A_{\text{Dreieck}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot y$$

Außerdem gelten:

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{x}{r} \\
\iff x &= r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \text{und} \\
\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{y}{r} \\
\iff y &= r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}$$

Für den Flächeninhalt des Dreiecks  $A_{\text{Dreieck}}$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}
A_{\text{Dreieck}} &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \\
\implies A_{\text{Dreieck}} &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
\implies A_{\text{Dreieck}} &= r^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir für den Flächeninhalt des Kreisabschnittes  $A$ :

$$\begin{aligned}
A &= A_{\text{Kreisaus}} - A_{\text{Dreieck}} \\
\implies A &= \frac{\pi r^2 \alpha}{360^\circ} - r^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}$$

**Aufgabe 56**

Nach dem Kosinussatz gilt  $a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$ . Der Satz des Pythagoras gilt nur für rechtwinklige Dreiecke, und da  $c$  die Hypotenuse ist, gilt  $\gamma = 90^\circ$  und  $\cos \gamma = 0$ .

**Aufgabe 57**

Für den Flächeninhalt des Quadrates ( $A$ ) gilt offensichtlich:

$$A = c^2$$

Diese Fläche setzt sich aus folgenden Teilflächen zusammen:

4 gleich große Dreiecksflächen ( $A_{\text{Dreieck}}$ ) und einer quadratischen Fläche ( $A_{\text{Quadrat}}$ ).

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot A_{\text{Dreieck}} + A_{\text{Quadrat}} \\ \Rightarrow A &= 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + (b - a)^2 \\ \Rightarrow A &= a^2 + b^2 \\ \Rightarrow c^2 &= a^2 + b^2 \quad / ! \end{aligned}$$

**Aufgabe 58**

Betrachten Sie die Sisse zur Aufgabe. Bezeichnen wir die noch nicht benannten Stücke der Diagonalen des Quadrates mit der Seitenlänge  $a$  ( $d_{\text{Quadrat}}$ ) jeweils mit  $x$ , dann gilt:

$$d_{\text{Quadrat}} = 2 \cdot d + 2 \cdot x$$

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} d_{\text{Quadrat}} &= \sqrt{2}a \\ \Rightarrow 2d + 2x &= \sqrt{2}a \quad / d = 2r \\ \Rightarrow 4r + 2x &= \sqrt{2}a \\ \Rightarrow 4r &= \sqrt{2}a - 2x \\ \Rightarrow r &= \frac{1}{4}\sqrt{2}a - \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Durch geschicktes Einzeichnen eines weiteren Radius ( $r$ ) in einen der beiden Kreise erhalten wir ein rechtwinklig-gleichschenkeliges Dreieck mit den Katheten  $r$  und der Hypotenuse  $(r + x)$ .

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} 2r^2 &= (r + x)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{2}r &= r + x \\ \Rightarrow x &= r(\sqrt{2} - 1) \quad / \text{ also :} \\ \\ \Rightarrow 4r &= \sqrt{2}a - 2r(\sqrt{2} - 1) \\ \Rightarrow 2r &= \sqrt{2}a - 2\sqrt{2}r \\ \Rightarrow 2r + 2\sqrt{2}r &= \sqrt{2}a \\ \Rightarrow r &= \frac{\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})}a \\ \Rightarrow d &= \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}a \end{aligned}$$

**Aufgabe 59**

Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} a^2 + g^2 &= h^2 & / \sin \alpha = \frac{g}{h}, \cos \alpha = \frac{a}{h} \\ \implies (h \cdot \cos \alpha)^2 + (h \cdot \sin \alpha)^2 &= h^2 & / h = 1 \\ \implies (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 &= 1 \\ \implies (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 &= 1 \end{aligned}$$

**Aufgabe 60**

Die Rechtecksfläche ( $A$ ) setzt sich aus folgenden Teilflächen zusammen:  
zwei gleich große Dreiecksflächen ( $A_{\text{Dreieck 1}}$ ), zwei gleich große Dreiecksflächen  
( $A_{\text{Dreieck 2}}$ ) und einer rechteckigen Fläche ( $A_{\text{Rechteck}}$ ).

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot A_{\text{Dreieck 1}} + 2 \cdot A_{\text{Dreieck 2}} + A_{\text{Rechteck}} \\ \implies A &= 2\left(\frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot b_1\right) + 2\left(\frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot b_2\right) + (b_1 - a_2) \cdot (b_2 - a_1) \\ \implies A &= (a_1 \cdot b_1) + (a_2 \cdot b_2) + (b_1 - a_2) \cdot (b_2 - a_1) & / \sin \alpha = \frac{a_1}{c_1}, \cos \alpha = \frac{b_1}{c_1} \\ & & / \sin \alpha = \frac{a_2}{c_2}, \cos \alpha = \frac{b_2}{c_2} \\ \implies A &= a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 \\ \implies A &= (c_1 \cdot \sin \alpha \cdot c_2 \cdot \cos \alpha) + (c_1 \cdot \cos \alpha \cdot c_2 \cdot \sin \alpha) \\ \implies A &= c_1 \cdot c_2 (\sin \alpha)^2 + c_1 \cdot c_2 (\cos \alpha)^2 & / (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \\ \implies A &= c_1 \cdot c_2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \\ \implies A &= c_1 \cdot c_2 \end{aligned}$$

**Aufgabe 61**

- a)  $\beta \approx 40,4^\circ$ ,  $\alpha \approx 111,5^\circ$ ,  $a \approx 231,12m$   
b)  $\gamma \approx 92,35^\circ$ ,  $\alpha \approx 35,97^\circ$ ,  $\beta \approx 51,67^\circ$