Studienvorbereitung Mathematik

an der Jade Hochschule – Wilhelmshaven Oldenburg Elsfleth
(Standort Oldenburg)

Lösungen

Inhaltsverzeichnis

Überarbeitung: Lutz P. Aderhold

1 Elementare Umformungsregeln zum Lösen von Gleichungen

1.1.

(*a*)
$$\begin{aligned} (3a+7b)^2 &= (3a)^2 + 2\cdot(3a)\cdot(7b) + (7b)^2 && \text{(1. binomische Formel)} \\ &= 9a^2 + 42ab + 49b^2 \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} (5a+7c)^2 &= (5a)^2 + 2\cdot(5a)\cdot(7c) + (7c)^2 && \text{(1. binomische Formel)} \\ &= 25a^2 + 70ac + 49c^2 \end{aligned}$$

(*c*)
$$\begin{aligned} (-2a^2+13d)^2 &= (13d-2a^2)^2 && \text{(Kommutativgesetz)} \\ &= (13d)^2 - 2\cdot(13d)\cdot(2a^2) + (2a^2)^2 && \text{(2. binomische Formel)} \\ &= 169d^2 - 52da^2 + 4a^4 \\ &= 4a^4 - 52a^2d + 169d^2 && \text{(Kommutativgesetz)} \end{aligned}$$

(*d*)
$$\begin{aligned} (9b-16c)\cdot(9b+16c) &= (9b+16c)(9b-16c) && \text{(Kommutativgesetz)} \\ &= 81b^2 - 256c^2 && \text{(3. binomische Formel)} \end{aligned}$$

(*e*)
$$(8a+14b)\cdot(8a-14b) = 64a^2 - 196b^2 \qquad \text{(3. binomische Formel)}$$

(*f*)
$$\begin{aligned} (7x-4y)^2 &= (7x)^2 + 2\cdot(7x)\cdot(-4y) + (-4y)^2 && \text{(2. binomische Formel)} \\ &= 49x^2 - 56xy + 16y^2 \end{aligned}$$

(*g*)
$$\begin{aligned} (-0,2a+1,2b^2)^2 &= (1,2b^2-0,2a)^2 && \text{(Kommutativgesetz)} \\ &= (1,2b^2)^2 + 2\cdot(1,2b^2)\cdot(-0,2a) + (0,2a)^2 && \text{(2. binomische Formel)} \\ &= 1,44b^4 - 0,48b^2a + 0,04a^2 \\ &= 0,04a^2 - 0,48ab^2 + 1,44b^4 && \text{(Kommutativgesetz)} \end{aligned}$$

1.2.

(*a*)
$$\begin{aligned} 9x^2+90x+144 &= 9(x^2+10x+16) && \text{(Ausklammern eines Faktors)} \\ &= 9(x+2)(x+8) && \text{(Zerlegen in Linearfaktoren)} \end{aligned}$$

(*b*)
$$\begin{aligned} a^4+6a^2-40 &= (a^2+10)(a^2-4) && \text{(Zerlegen in Faktoren)} \\ &= (a^2+10)(a+2)(a-2) && \text{(3. binomische Formel)} \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{lll}
(c)\quad 256a^2 - c^4 & = & (16a)^2 - (c^2)^2 \\
 & = & (16a + c^2)(16a - c^2) \qquad \textit{(3.binomische Formel)} \\
 & = & (16a + c^2)(4\sqrt{4} + c)(4\sqrt{4} - c) \qquad \textit{(fuer a>0} \\
 & & \qquad \textit{3. binomische Formel)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(d)\quad 169e^6 - 25f^{10} & = & (13e^3)^2 - (5f^5)^2 \\
 & = & (13e^3 + 5f^5)(13e^3 - 5f^5) \qquad \textit{(3. binomische Formel)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(e)\quad 625d^8 - a^4 & = & (25d^4)^2 - (a^2)^2 \\
 & = & (25d^4 + a^2)(25d^4 - a^2) \qquad \textit{(3. binomische Formel)} \\
 & = & (25d^4 + a^2)((5d^2)^2 - (a)^2) \\
 & = & (25d^4 + a^2)(5d^2 + a)(5d^2 - a) \qquad \textit{(3. binomische Formel)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(f)\quad 144c^2 - d^6 & = & (12c)^2 - (d^3)^2 \\
 & = & (12c + d^3)(12c - d^3) \qquad \textit{(3. binomische Formel)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(g)\quad 81a^4 - b^8 & = & (9a^2)^2 - (b^4)^2 \\
 & = & (9a^2 + b^4)(9a^2 - b^4) \qquad \textit{(3. binomische Formel)} \\
 & = & (9a^2 + b^4)(3a + b^2)(3a - b^2) \qquad \textit{(3. binomische Formel)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(h)\quad 36h^{10} - 196g^6 & = & (6h^5)^2 - (14g^3)^2 \\
 & = & (6h^5 + 14g^3)(6h^5 - 14g^3) \qquad \textit{(3. binomische Formel)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(i)\quad 16x^2 + 8x + 1 - 49y^2 & = & (16x^2 + 8x + 1) - 49y^2 \\
 & = & (4x + 1)^2 - 49y^2 \qquad \textit{(1. binomische Formel)} \\
 & = & ((4x + 1) + 7y)((4x + 1) - 7y) \qquad \textit{(3. binomische Formel)} \\
 & = & (4x + 7y + 1)(4x - 7y + 1)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(j)\quad 3y^3 + 27y^2 + 60y & = & 3y(y^2 + 9y + 20) \qquad \textit{(Ausklammern eines Faktors)} \\
 & = & 3y(y + 4)(y + 5) \qquad \textit{(Zerlegen in Linearfaktoren)}
\end{array}
$$

$$
(k)\quad 49m^2 + 42mn^2 + 9n^4 = (7m, +3n^2)^2) \qquad \textit{(1. binomische Formel)}
$$

$$
\begin{array}{lll}
(l)\quad -16p^4 + 64p^2q^4 - 64q^8 & = & -4(4p^4 - 16p^2q^4 + 16q^8) \qquad \textit{(Ausklammern eines Faktors)} \\
 & = & -4(p^2 - 2q^4) \qquad \textit{(2. binomische Formel)}
\end{array}
$$

1.3.

(a)
$$\begin{aligned}(-5c+3a)(5c-3a) &= (-1)(5c-3a)(5c-3a) && \textit{(Ausklammern von } (-1))\\ &= -(5c-3a)^2 && \textit{(2. binomische Formel)}\\ &= -25c^2+30ac-9a^2 && \textit{(2. binomische Formel)}\end{aligned}$$

(b)
$$9x^2+90x+144 = 9(x+2)(x+8) \qquad \textit{(Siehe Aufgabe 4(e))}$$

(c)
$$\begin{aligned}(-8d+5e)(8d-5e) &= (-1)(8d-5e)(8d-5e) && \textit{(Ausklammern von } (-1))\\ &= -(8d-5e)^2 && \textit{(2. binomische Formel)}\\ &= -64d^2+80de-25e^2 && \textit{(2. binomische Formel)}\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}4x^2+40x+36 &= 4(x^2+10x+9) && \textit{(Ausklammern eines Faktors)}\\ &= 4(x+1)(x+9) && \textit{(Zerlegen in Linearfaktoren)}\end{aligned}$$

1.4.

(a)
$$\begin{aligned}(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{3}f)^2 &= (\tfrac{1}{2}e)^2+2\cdot(\tfrac{1}{2}e)\cdot(-\tfrac{1}{3}f)+(\tfrac{1}{3}f)^2 && \textit{(2. binomische Formel)}\\ &= \tfrac{1}{4}e^2-\tfrac{1}{3}ef+\tfrac{1}{9}f^2\end{aligned}$$

Anmerkung:
Es empfiehlt sich, die Brüche beizubehalten;
die Verwendung von Dezimalbrüchen führt hier erfahrungsgemäß zu Fehlern,
oder haben Sie tatsächlich das folgende Ergebnis:

$0{,}25e^2-0{,}\overline{3}ef+0{,}\overline{1}f^2$(?)!

(b)
$$\begin{aligned}(\tfrac{1}{2}g-\tfrac{1}{5}h)^2 &= (\tfrac{1}{2}g)^2+2\cdot(\tfrac{1}{2}g)\cdot(-\tfrac{1}{5}h)+(\tfrac{1}{5}h)^2 && \textit{(2. binomische Formel)}\\ &= \tfrac{1}{4}g^2-\tfrac{1}{5}gh+\tfrac{1}{25}h^2\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}(\tfrac{3}{a}+\tfrac{12}{b})^2 &= (\tfrac{3}{a}g)^2+2\cdot(\tfrac{3}{a})\cdot(\tfrac{12}{b})+(\tfrac{12}{b}h)^2 && \textit{(1. binomische Formel)}\\ &= \tfrac{9}{a^2}+\tfrac{72}{ab}+\tfrac{144}{b^2}\end{aligned}$$

(d)
$$(\tfrac{9}{m^2}+\tfrac{1}{3}n)\cdot(-\tfrac{1}{3}n+\tfrac{9}{m^2}) = \tfrac{81}{m^4}-\tfrac{1}{9}n^2 \qquad \textit{(3. binomische Formel)}$$

1.5.

$$
\begin{array}{llcll}
(a) & 36e^2 - 2ef + \frac{1}{36}f^2 & = & (6e)^2 - 2\cdot(6e)\cdot(\frac{1}{6}f) + (\frac{1}{6}f)^2 & \\
 & & = & (6e - \frac{1}{6}f)^2 & \textit{(2. binomische Formel)} \\
(b) & 16c^2 - 2cd + \frac{1}{16}d^2 & = & (4c - \frac{1}{4}d)^2 & \textit{(2. binomische Formel)} \\
(c) & -\frac{16}{a^2} + \frac{32}{ab^2} - \frac{16}{b^4}2 & = & -(\frac{4}{a} - (\frac{2}{b})^2)^2 & \textit{(2. binomische Formel)} \\
(d) & (\frac{2}{m} + \frac{7}{n^3})\cdot(-\frac{8}{m} + \frac{28}{n^3}) & = & \frac{16}{m^2} - \frac{196}{n^6} & \textit{(3. binomische Formel)}
\end{array}
$$

1.6.

$$
\begin{array}{llcll}
(a) & \frac{a^3-3a^2}{a^2-6a+9} & = & \frac{a^2(a-3)}{(a-3)^2} & \textit{(Ausklammern, 2. binomische Formel)} \\
 & & = & \frac{a^2}{a-3} & \textit{(fuer } a\neq 3\textit{)} \\
 & \mathbb{D}_f & = & \mathbb{R}\setminus\{+3\} & \\
(b) & \frac{2x^2-18x}{x^2-81} & = & \frac{2x(x-9)}{(x-9)(x+9)} & \textit{(Ausklammern, 3. binomische Formel)} \\
 & & = & \frac{2x}{x+9} & \textit{(fuer } x\neq 9,\ x\neq -9\textit{)} \\
 & \mathbb{D}_f & = & \mathbb{R}\setminus\{-9,\ 9\} & \\
(c) & \frac{z^3-z^2-56z}{2z^2-30z+112} & = & \frac{z(z^2-z-56)}{2(z^2-15z+56)} & \textit{(Ausklammern)} \\
 & & = & \frac{z(z+7)(z-8)}{2(z-7)(z-8)} & \textit{(Zerlegen in Linearfaktoren)} \\
 & & = & \frac{z(z+7)}{2(z-7)} & \textit{(fuer } z\neq 8\textit{)} \\
 & \mathbb{D}_f & = & \mathbb{R}\setminus\{7,\ 8\} &
\end{array}
$$

1.7.

$$
\begin{array}{llcll}
(a) & \frac{3x^3-1}{x^3+x^2y} + \frac{x-1}{x+y} & = & \frac{3x^3-1}{x^2(x+y)} + \frac{(x-1)}{x+y} & \textit{(Ausklammern im Nenner (links))} \\
 & & = & \frac{3x^3-1}{x^2(x+y)} + \frac{(x-1)\cdot x^2}{x^2(x+y)} & \textit{(Hauptnenner)} \\
 & & = & \frac{3x^3-1+x^3-x^2}{x^2(x+y)} & \textit{(Ausmultiplizieren im Zaehler)} \\
 & & = & \frac{4x^3-x^2-1}{x^2(x+y)} & \textit{(Zusammenfassen im Zaehler)}
\end{array}
$$

$$\begin{aligned}
(b)\quad \frac{b}{a^2+2ab+b^2} - \frac{2a}{a^2-b^2} &= \frac{b}{(a+b)^2} - \frac{2a}{(a+b)(a-b)} && (Binomische\ Formeln)\\
&= \frac{b(a-b)}{(a+b)^2(a-b)} - \frac{2a(a+b)}{(a+b)^2(a-b)} && (Hauptnenner)\\
&= \frac{ab-b^2-2a^2-2ab}{(a+b)^2(a-b)} && (Ausmultiplizieren\ im\ Zaehler)\\
&= \frac{-2a^2-ab-b^2}{(a+b)^2(a-b)} && (Zusammenfassen\ im\ Zaehler)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c)\quad \frac{-x^2+5x-4}{16-8x+x^2} &= \frac{-(x-1)(x-4)}{(x-4)^2} && (BinomischeFormel,\ Linearfaktoren)\\
&= \frac{-(x-1)}{x-4} && (Kuerzen)\\
&= \frac{1-x}{x-4} && (Ausmultiplizieren\ im\ Zaehler\ mit\ (-1))\\
&= \frac{x-1}{4-x} && (Erweitern\ mit\ (-1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d)\quad \frac{1+x}{x^2-x} - \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x}\right) &= \frac{1+x}{x(x-1)} - \left(\frac{2\cdot x}{(x-1)x} - \frac{2(x-1)}{(x-1)x}\right) && (Hauptnenner)\\
&= \frac{1+x-2x+2x-2}{(x-1)x} && (Ausmultiplizieren\ im\ Zaehler)\\
&= \frac{x-1}{(x-1)x} && (Zusammenfassen\ im\ Zaehler)\\
&= \frac{1}{x} && (Kuerzen)
\end{aligned}$$

1.8.

$$\begin{aligned}
(a)\quad (x+2)^2-(x-3)^2 &= 0 &&\\
x^2+4x+4-(x^2-6x+9) &= 0 && (1.\ binomische\ Formel)\\
x^2+4x+4-x^2+6x-9 &= 0 && (Ausmultiplizieren\ mit\ (-1))\\
10x &= 5 && (-x^2,\ Zusammenfassen)\\
x &= \tfrac{1}{2} &&
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b)\quad 2x^2+11x-10 &= x^2+16 &&\\
x^2+11x-26 &= 0 && (-x^2,\ -16)\\
(x+13)(x-2) &= 0 && (Zerlegen\ in\ Linearfaktoren)\\
x=-13 &\vee\ x=2 &&
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(c)\quad (x+3)^2-(x-2)^2 &= 0 &&\\
x^2+6x+9-(x^2-4x+4) &= 0 && (1.\ binomische\ Formel)\\
x^2+6x+9-x^2+4x-4 &= 0 && (Ausmultiplizieren\ mit\ (-1))\\
10x &= -5 && (-x^2,\ Zusammenfassen)\\
x &= -\tfrac{1}{2} &&
\end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned}
2x^2+15x-18 &= x^2+16 \\
x^2+15x-34 &= 0 && (-x^2,\ -16) \\
(x+17)(x-2) &= 0 && (\textit{Zerlegen in Linearfaktoren}) \\
x=-17 &\vee\ x=2
\end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned}
\tfrac{p^2}{2}+3p+5 &= 0 \\
p^2+6p+10 &= 0 && (\cdot 2) \\
p_{1,2} &= 3\pm\sqrt{9-10} && (\textit{Anwenden der } p\!-\!q\!-\!\textit{Formel}) \\
p_{1,2} &= 3\pm\sqrt{-1} && (\textit{Da } \sqrt{-1} \textit{ keine reelle Zahl ist, ist die Lösungsmenge leer.})
\end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned}
-16s^2+8s &= 1 \\
s^2-\tfrac{1}{2}s+\tfrac{1}{16} &= 0 && (\textit{Umformen}) \\
s_{1,2} &= \tfrac{1}{4}\pm\sqrt{\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{16}} && (\textit{Anwenden der } p\!-\!q\!-\!\textit{Formel}) \\
s &= \tfrac{1}{4} && (\textit{Da } \sqrt{0}=0 \textit{ hat diese quadratische Gleichung genau eine Lösung.})
\end{aligned}$$

(g)
$$\begin{aligned}
\tfrac{5}{6x-6}-\tfrac{7}{3x+3} &= \tfrac{x}{x^2-1} \\
\tfrac{5}{6(x-1)}-\tfrac{7}{3(x+1)} &= \tfrac{x}{(x+1)(x-1)} \\
\tfrac{5(x+1)}{6(x-1)(x+1)}-\tfrac{7\cdot 2(x-1)}{3(x+1)\cdot 2(x-1)} &= \tfrac{x\cdot 6}{(x+1)(x-1)\cdot 6} && (\textit{Hauptnenner: } (x+1)(x-1)\cdot 6,\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1,\ 1\}) \\
5(x+1)-14(x-1) &= 6x && (\textit{Multiplizieren mit dem Hauptnenner}) \\
5x+5-14x+14 &= 6x \\
-15x &= -19 \\
x &= \tfrac{19}{15}
\end{aligned}$$

(h)
$$\begin{aligned}
\tfrac{x+1}{x-1}+\tfrac{x+1}{x-4} &= \tfrac{x^2+x}{x^2-5x+4} \\
\tfrac{x+1}{x-1}+\tfrac{x+1}{x-4} &= \tfrac{x(x+1)}{(x-1)(x-4)} && (\textit{Zerlegen in Linearfaktoren}) \\
\tfrac{(x+1)(x-4)}{(x-1)(x-4)}+\tfrac{(x+1)(x-1)}{(x-4)(x-1)} &= \tfrac{x(x+1)}{(x-1)(x-4)} && (\textit{Hauptnenner: } (x-1)(x+4),\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{1,\ 4\}) \\
(x+1)(x-4)+(x+1)(x-1) &= x(x+1) && (\textit{Multiplizieren mit dem Hauptnenner}) \\
x^2-3x-4+x^2-1 &= x^2+x \\
x^2-4x-5 &= 0 \\
(x+1)(x-5) &= 0 && (\textit{Zerlegen in Linearfaktoren}) \\
x=-1 &\vee\ x=5 && (\mathbb{L}=\{-1,\ 5\})
\end{aligned}$$

1.9.

(a)
$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1}{8}x - 2 \\ 0 &= \tfrac{1}{8}x_0 - 2 && \textit{(Berechnung der Stelle(n) } x_0 \textit{ mit } f(x_0)=0) \\ 2 &= \tfrac{1}{8}x_0 && (+2) \\ x_0 &= 16 && (\cdot 8) \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 15x - 34 \\ 0 &= x_0^2 + 15x_0 - 34 && \textit{(Berechnen der Stelle(n) } x_0 \textit{ mit } f(x_0)=0) \\ 0 &= (x_0 + 17)(x_0 - 2) && \textit{(Zerlegen in Linearfaktoren)} \\ x_0 = -17 &\vee x_0 = 2 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 13x^2 + 36 \\ 0 &= x_0^4 - 13x_0^2 + 36 && \textit{(Berechnen der Stelle(n) } x_0 \textit{ mit } f(x_0)=0) \\ 0 &= (x_0^2 - 4)(x_0^2 - 9) && \textit{(Zerlegen in Linearfaktoren)} \\ 0 &= (x_0 + 2)(x_0 - 2)(x_0 + 3)(x_0 - 3) && \textit{(Zerlegen in Linearfaktoren)} \\ x_0 = -2 &\vee x_0 = 2 \\ \vee\ x_0 = -3 &\vee x_0 = 3 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 2x + 1 \\ 0 &= x_0^2 - x_0 + \tfrac{1}{2} && \textit{(Berechnen der Stelle(n) } x_0 \textit{ mit } f(x_0)=0) \\ x_0 &= \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}} \\ x_0 &= \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}} \\ x_0 &\notin \mathbb{R} && \text{(es existiert keine reelle Loesung!)} \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 10x + 25 \\ 0 &= x_0^2 + 10x_0 + 25 && \textit{(Berechnen der Stelle(n) } x_0 \textit{ mit } f(x_0)=0) \\ 0 &= (x_0 + 5)(x_0 + 5) && \textit{(Zerlegen in Linearfaktoren)} \\ x_0 &= -5 && \text{(es existiert genau eine Loesung!)} \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 49x \\ 0 &= x_0^3 - 49x_0 && \textit{(Berechnen der Stelle(n) } x_0 \textit{ mit } f(x_0)=0) \\ 0 &= x_0 \cdot (x_0^2 - 49) && \textit{(Zerlegen in Linearfaktoren)} \\ 0 &= x_0 \cdot (x_0 - 7) \cdot (x_0 + 7) && \textit{(Zerlegen in Linearfaktoren)} \\ x_0 = 0 &\vee x_0 = 7 \\ \vee\ x_0 &= -7 \end{aligned}$$

2 Potenz- und Wurzelrechnung

Die gegebenen Ausdrücke werden unter Anwendung der Potenzrechenregeln (Lehrtext Teil A, S. 57) und der Regeln der Wurzelrechnung (Lehrtext Teil A, S. 60) vereinfacht.

2.1.

(*a*) $17^3 \cdot \left(\frac{1}{17}\right)^3 = (17 \cdot \frac{1}{17})^3$ (*Potenzrechenregel* (3))

$= 1$

(*b*) $y^5 \cdot y^7 = y^{5+7}$ (*Potenzrechenregel* (1))

$= y^{12}$

(*c*) $3a^2 \cdot 2a \cdot 6a^3 = (3 \cdot 2 \cdot 6) \cdot (a^2 \cdot a^1 \cdot a^3)$ (*Kommutativgesetz, Assoziativgesetz*)

$= 36 \cdot a^{2+1+3}$ (*Potenzrechenregel* (1))

$= 36a^6$

(*d*) $b^{2x} \cdot b^{3x} = b^{2x+3x}$ (*Potenzrechenregel* (1))

$= b^{5x}$

(*e*) $a^x \cdot a = a^{x+1}$ (*Potenzrechenregel* (1))

(*f*) $x^3 \cdot y^2 \cdot x^2 \cdot y^3 = (x^3 \cdot x^2) \cdot (y^2 \cdot y^3)$ (*Kommutativgesetz, Assoziativgesetz*)

$= x^{3+2} \cdot y^{2+3}$ (*Potenzrechenregel* (1))

$= x^5 \cdot y^5$

$= (x \cdot y)^5$ (*Potenzrechenregel* (3))

(*g*) $\frac{21y^{11}}{14y^9} = \frac{3}{2} \cdot \frac{y^{11}}{y^9}$ (*Assoziativgesetz, Kürzen*)

$= \frac{3}{2} \cdot y^{11-9}$ (*Potenzrechenregel* (2))

$= \frac{3}{2} \cdot y^2$ (*Potenzrechenregel* (2))

(*h*) $\frac{a^5 \cdot b^4}{b^2 \cdot a^3} = \frac{a^5}{a^3} \cdot \frac{b^4}{b^2}$ (*Kommutativgesetz, Assoziativgesetz*)

$= a^{5-3} \cdot b^{4-2}$ (*Potenzrechenregel* (2))

$= a^2 \cdot b^2$

$= (a \cdot b)^2$ (*Potenzrechenregel* (3))

$$
\begin{aligned}
(i)\quad x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}} &= x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} && (\textit{Potenzrechenregel (1)})\\
&= x^{\frac{7}{12}}\\
&= \sqrt[12]{x^7} && (\textit{Potenzrechenregel (7)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(j)\quad \sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a} &= a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{5}} && (\textit{Potenzrechenregel (7)})\\
&= a^{\frac{7}{10}}\\
&= \sqrt[10]{a^7} && (\textit{Potenzrechenregel (7)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(k)\quad \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} &= \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} && (\textit{Potenzrechenregel (7)})\\
&= x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} && (\textit{Potenzrechenregel (2)})\\
&= x^{-\frac{1}{4}}\\
&= \frac{1}{\sqrt[4]{x}} && (\textit{Potenzrechenregel (6)})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(l)\quad \frac{x^{n+2}}{x^{n+1}} &= x^{(n+2)-(n+1)} && (\textit{Potenzrechenregel (2)})\\
&= x
\end{aligned}
$$

2.2.

$$
\begin{aligned}
(a)\quad 4-\sqrt{2x-5} &= x && (\textit{es liegen alle } x \textit{ im Definitionsbereich,}\\
& && \textit{fuer die gilt: } 2x{-}5{\geq}0, \textit{ also: } x{\geq}\tfrac{2}{5})\\
-\sqrt{2x-5} &= x-4\\
(-\sqrt{2x-5})^2 &= (x-4)^2 && (\textit{Achtung: Das Quadrieren beider Seiten}\\
& && \textit{einer Gleichung ist keine } \text{Äquivalenzumformung!})\\
2x-5 &= x^2-8x+16\\
x^2-10x+21 &= 0\\
(x-3)(x-7) &= 0\\
x=3 &\vee\ x=7 && (\textit{Beide } \text{Lösungen } \textit{liegen im Definitionsbereich})
\end{aligned}
$$

Probe:

Die Probe ist hier unbedingt erforderlich. Wegen der fehlenden Äquivalenz *sind die* Lösungsmengen *der Ausgangsgleichung und der Gleichung* $x^2-10x+21=0$ *nicht zwingend gleich.*

Probe mit x=3:

$$
\begin{aligned}
4-\sqrt{2\cdot 3-5} &= 3\\
4-\sqrt{6-5} &= 3\\
4-\sqrt{1} &= 3\\
4-1 &= 3\\
3 &= 3 \quad (\textit{Also: } 3{\in}\mathbb{L})
\end{aligned}
$$

Probe mit x=7

$$\begin{array}{lcl} 4-\sqrt{2\cdot 7-5} & = & 3 \\ 4-\sqrt{14-5} & = & 3 \\ 4-\sqrt{9} & = & 3 \\ 4-3 & = & 3 \\ 1 & = & 3 \quad (\textit{Also: } 7 \notin \mathbb{L}) \end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} (b) & \sqrt{4x}-\sqrt{9x}+\sqrt{5} & = & 0 & (\mathbb{D}=\mathbb{R}_0^+) \\ & \sqrt{4}\cdot\sqrt{x}-\sqrt{9}\cdot\sqrt{x}+\sqrt{5} & = & 0 & (\textit{Wurzelgesetz}) \\ & 2\sqrt{x}-3\sqrt{x}+\sqrt{5} & = & 0 & \\ & -\sqrt{x} & = & -\sqrt{5} & \\ & x & = & 5 & \mathbb{L}=\{5\}) \end{array}$$

$$\begin{array}{llcll} (c) & \sqrt{2x+5}-\sqrt{4x-4}+1 & = & 0 & (\textit{Es liegen alle } x \textit{ im Definitionsbereich,} \\ & & & & \textit{fuer die gilt: } 2x+5\geq 0 \wedge 4x-4\geq 0 \\ & & & & \textit{also: } x\geq -\tfrac{5}{2} \wedge x\geq 1;\ \textit{also fuer } x\geq 1) \\ & \sqrt{2x+5}-\sqrt{4x-4} & = & -1 & \\ & (\sqrt{2x+5}-\sqrt{4x-4})^2 & = & (-1)^2 & (\textit{Quadrieren}) \\ & 2x+5-2\sqrt{(2x+5)(4x-4)}+4x-4 & = & 1 & \\ & 6x-2\sqrt{(2x+5)4\cdot(x-1)} & = & 0 & \\ & 6x-4\sqrt{(2x+5)(x-1)} & = & 0 & (\textit{Wurzelgesetz}) \\ & 2\sqrt{(2x+5)(x-1)} & = & 3x & \\ & (2\sqrt{(2x+5)(x-1)})^2 & = & (3x)^2 & (\textit{Quadrieren}) \\ & 4(2x+5)(x-1) & = & 9x^2 & \\ & 4(2x^2+3x-5) & = & 9x^2 & \\ & 8x^2+12x-20 & = & 9x^2 & \\ & x^2-12x+20 & = & 0 & \\ & (x-2)(x-10) & = & 0 & \\ & x=2 & \vee & x=10 & \textit{Beide Lösungen liegen in } \mathbb{D}) \end{array}$$

Probe:

Die Probe ist hier wieder unbedingt erforderlich!

Probe mit x=2:

$$\begin{array}{lcl} \sqrt{2\cdot 2+5}-\sqrt{4\cdot 2-4}+1 & = & 0 \\ \sqrt{4+5}-\sqrt{8-4}+1 & = & 0 \\ \sqrt{9}-\sqrt{4}+1 & = & 0 \\ 3-2+1 & \neq & 0 \quad (\textit{Also: } 2 \notin \mathbb{L}) \end{array}$$

Probe mit x=10

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\cdot 10+5}-\sqrt{4\cdot 10-4}+1 &= 0\\
\sqrt{20+5}-\sqrt{40-4}+1 &= 0\\
\sqrt{25}-\sqrt{36}+1 &= 0\\
5-6+1 &= 0 \quad (\textit{Also: } 10\in\mathbb{L})
\end{aligned}$$

3 Exponentialgleichungen und Logarithmen

3.1.

(*a*)

$$\begin{aligned}
K_5 &= 161\ 051 \text{ EUR}\\
K_0\cdot(1+\tfrac{10}{100})^5 &= 161\ 051 \text{ EUR}\\
K_0 &= \tfrac{161\ 051}{1,1^5}\\
K_0 &= 100\ 000 \text{ EUR}
\end{aligned}$$

Der Kapitalanleger hat einen Betrag von 100 000 EUR für fünf Jahre zu einem Zinssatz von 10 % fest angelegt.

(*b*)

$$\begin{aligned}
K_5 &= 161\ 051 \text{ EUR}\cdot(1+\tfrac{10}{100})^5\\
K_5 &= 161\ 051 \text{ EUR}\cdot 1,1^5\\
K_5 &\approx 259\ 374 \text{ EUR}
\end{aligned}$$

Das Guthaben würde dann etwa 259 374 EUR betragen.

(*c*)

$$\begin{aligned}
K_x &\geq 500\ 000\text{EUR}\\
500\ 000\text{EUR} &\geq 100\ 000\text{EUR}\cdot 1,1^x\\
5 &\geq 1,1^x\\
\log 5 &\geq x\cdot\log 1,1\\
x &\geq \tfrac{\log 5}{\log 1,1}
\end{aligned}$$

Ein Guthaben von 100 000 EUR müßte für (mindestens) 17 Jahre zu einem Zinssatz von 10 % fest angelegt werden, um einen Betrag von (mindestens) 500 000 EUR zu erzielen.

3.2.

(a) $\log_4 16 \;=\; 2$

(b) $\log_2 32 \;=\; 5$

(c) $\log_{10} 1 \;=\; 0$

(d) $\log_2 \frac{1}{8} \;=\; -3$

(e) $\log_{\frac{1}{10}} 10 \;=\; -1$

(f) $\log_{12} 144 \;=\; 2$

(g) $\log_8 2 \;=\; \frac{1}{3}$

(h) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \;=\; 3$

(i) $\log_3 \frac{1}{27} \;=\; -3$

(j) $\log_{10} 10\,000 \;=\; 4$

(k) $\log_2 \frac{1}{2} \;=\; -1$

(l) $\log_4 2 \;=\; \frac{1}{2}$

(m) $\log_7 49 \;=\; 2$

(n) $\log_7 \frac{1}{49} \;=\; -2$

(o) $\log_{49} 7 \;=\; \frac{1}{2}$

(p) $\log_7 7^{23} \;=\; 23$

(q) $\ln \frac{1}{e} \;=\; -1$

(r) $\ln \frac{e^2 \cdot \sqrt{e}}{\sqrt[3]{e}} \;=\; \frac{13}{6}$

3.3. $\log_7 10 \;=\; \dfrac{1}{\log_{10} 7} \;\approx\; 1{,}1833$

3.4.

(a) wahr

(b) wahr

(c) falsch

(d) falsch

(e) wahr

(f) falsch

(g) wahr

(h) falsch

3.5.

(a)
$$
\begin{aligned}
12 \cdot 4^x + 17 &= 257 - 3 \cdot 4^x \\
15 \cdot 4^x &= 240 \\
4^x &= 16 \\
2^{2x} &= 2^4 \\
2x \cdot \log_2 2 &= 4 \cdot \log_2 2 \\
2x &= 4 \\
x &= 2
\end{aligned}
$$

(b)
$$
\begin{aligned}
2^{2x+7} &= 32 \cdot 8^{4x} \\
(2x+7) \cdot \log_2 2 &= \log_2(32 \cdot 8^{4x}) \\
2x + 7 &= \log_2 32 + \log_2 8^{4x} \\
2x + 7 &= 5 + 4x \cdot \log_2 8 \\
2x + 7 &= 5 + 4x \cdot 3 \\
2x + 7 &= 5 + 12x \\
x &= 0,2
\end{aligned}
$$

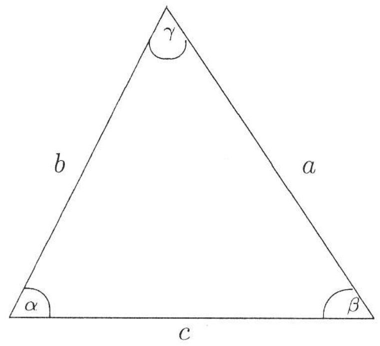
(c)
$$
\begin{aligned}
64 \cdot 4^{2x} - (\tfrac{1}{16})^{x-2} &= 0 \\
4^3 \cdot 4^{2x} - (4^{-2})^{x-2} &= 0 && (64{=}4^3,\ \tfrac{1}{16}{=}4^{-2}) \\
4^{3+2x} &= 4^{-2x+4} && (\textit{Potenzrechengesetze}) \\
3 + 2x &= -2x + 4 \\
4x &= 1 \\
x &= \tfrac{1}{4} && (\mathbb{L} = \{\tfrac{1}{4}\})
\end{aligned}
$$

(d)
$$
\begin{aligned}
b^{x-1} \cdot 3^x &= 2^{-x} \\
\lg(b^{x-1} \cdot 3^x) &= \lg(2^{-x}) && (\textit{Logarithmieren}) \\
(x-1)\lg b + x \lg 3 &= -x \lg b && (\textit{Logarithmengesetz}) \\
x \lg b - \lg b + x \lg 3 + x \lg b &= 0 \\
x(\lg b + \lg 3 + \lg 2) &= \lg b \\
x(\lg 6b) &= \lg b && (\textit{Logarithmengesetz}) \\
x &= \frac{\lg b}{\lg 6b} && (\lg 6b{=}\lg 6{+}\lg b;
\end{aligned}
$$

hier kann man also nicht kürzen!)

4 Grundlagen der Trigonometrie

4.1.



$$\begin{array}{llcll}
(i) & \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} & = & \frac{a}{c} & \textit{(Sinussatz / Lehrtext Teil A, S.73)} \\
\Longleftrightarrow & \sin\alpha & = & \frac{a}{c}\cdot\sin\gamma & \\
 & & = & \frac{6{,}13\text{cm}}{12{,}4\text{cm}}\cdot\sin 112^\circ & \\
 & & \approx & 0,4584 & \\
\Longrightarrow & \alpha_1 & \approx & 27,3^\circ & \textit{(oder } \alpha_2{=}180^\circ{-}\alpha_1 \\
 & & & & \alpha_2 \textit{ ist keine Lösung, da } \alpha_2{+}\gamma{>}180^\circ\textit{)} \\
 & \beta & = & 180^\circ - (\alpha+\gamma) & \\
 & \beta & = & 40,7^\circ & \\
 & \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} & = & \frac{a}{b} & \textit{(Sinussatz / Lehrtext Teil A, S.73)} \\
\Longleftrightarrow & b & = & \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot a & \\
 & & \approx & 8,72\text{cm} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcll}
(ii) & \gamma & = & 180^\circ - (\alpha+\beta) & \\
 & & = & 48,5^\circ & \\
 & \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} & = & \frac{b}{c} & \textit{(Sinussatz / Lehrtext Teil A, S.73)} \\
\Longleftrightarrow & b & = & \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot c & \\
 & & = & \frac{\sin 83{,}3^\circ}{\sin 48{,}5^\circ}\cdot 12,4\text{dm} & \\
 & & \approx & 16,4\text{dm} & \\
 & \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} & = & \frac{a}{c} & \textit{(Sinussatz / Lehrtext Teil A, S.73)} \\
\Longleftrightarrow & a & = & \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot c & \\
 & & = & \frac{\sin 48{,}2^\circ}{\sin 48{,}5^\circ}\cdot 12,4\text{cm} & \\
 & & \approx & 12,3\text{dm} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcll}
(iii) & \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} & = & \frac{b}{c} & \textit{(Sinussatz / Lehrtext Teil A, S.73)} \\
\Longleftrightarrow & \sin\gamma & = & \frac{c}{b}\cdot\sin\beta & \\
& & = & \frac{10{,}7\text{m}}{9{,}88\text{m}}\cdot\sin 65,5^\circ & \\
& & \approx & 0,9855 & \\
\Longrightarrow & \gamma_1 & \approx & 80,2^\circ & \textit{(oder } \gamma_2{=}180^\circ{-}\gamma_1{=}99{,}8^\circ \\
& & & & \gamma_2 \textit{ ist die zweite Lösung!} \\
& \alpha_1 & = & 180^\circ-(\beta+\gamma_1) & \textit{(oder } \alpha_2{=}180^\circ{-}(\beta{+}\gamma_2)) \\
& \alpha_1 & = & 34,3^\circ & \textit{(oder } \alpha_2{=}14{,}7^\circ) \\
& \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} & = & \frac{a}{b} & \textit{(Sinussatz / Lehrtext Teil A, S.73)} \\
\Longleftrightarrow & a & = & \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot b & \\
& a_1 & = & \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta}\cdot b & \textit{(oder } a_2{=}\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta}{\cdot}b) \\
& a_1 & = & \frac{\sin 34{,}3^\circ}{\sin 65{,}5^\circ}\cdot 9,88\text{m} & \textit{(oder } a_2{=}\frac{\sin 14{,}7^\circ}{\sin 65{,}5^\circ}{\cdot}9{,}88\text{m}) \\
& a_1 & \approx & 6,1\text{m} & \textit{(oder } a_2{\approx}2{,}8\text{m})
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcl}
(iv) & \alpha & \approx & 36,87^\circ \\
& \beta & \approx & 53,13^\circ \\
& \gamma & = & 90^\circ
\end{array}$$

Anmerkungen zur Anwendung des Sinussatzes:

Bei Teilergebnissen, wie $\sin\alpha = 0,4584$ kommt es bei der Auflösung nach α zur Mehrdeutigkeit wie man an einer Zeichnung des Graphen der Sinusfunktion leicht nachvollziehen kann (Lehrtext Teil B, S.17). Die Sinusfunktion nimmt an (unendlich) vielen Stellen den (y-)Wert 0,4584 an; von der Aufgabenstellung her kommen allerdings nur Winkel zwischen 0° und 180° (bzw. zwischen 0 und π im Bogenmaß) in Frage (Winkelsumme im Dreieck!). Im Aufgabenteil (i) scheidet die 2. Lösung offensichtlich aus. In der Aufgabe (ii) gibt es tatsächlich zwei Lösungen.

Ein weiteres Problem tritt bei Einsatz des Taschenrechners auf. Als Lösung solcher Gleichungen wie $\sin\alpha{=}0{,}4584$ liefert er grundsätzlich die Lösung, die im Bereich von -90° bis $+90^\circ$ liegt. Lösungen, die sich im Bereich zwischen 90° und 180° befinden, werden vom Taschenrechner also grundsätzlich nicht angezeigt, sondern müssen aus der angezeigten Lösung α_1 ($\alpha_1 < 90^\circ$) über $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$ ermittelt werden.

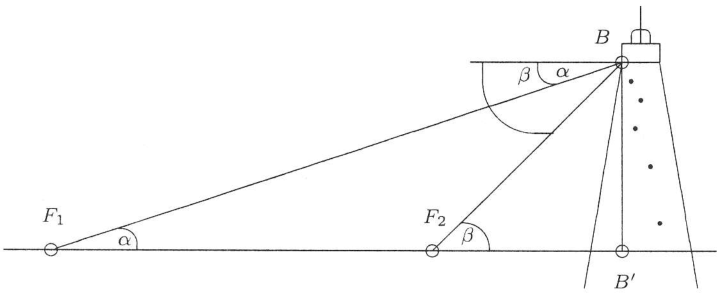
Eine Erinnerung an den frühen Geometrieunterricht (Kongruenzsätze) mag verdeutlichen, wann bei der Anwendung des Sinussatzes eine zweite Lösung in Frage kommt und wann nicht. Bei dem Kongruenzsatz SSW konnte man die Eindeutigkeit des konstruierten Dreiecks nur unter der zusätzlichen Forderung gewährleisten, daß der Winkel der größeren Seite gegenüberliegt; liegt er der kleineren Seite gegenüber, kann es keine, eine oder zwei Lösungen geben.

Im Rückblick auf die hier gestellten Übungsaufgaben kann man bei (i) konstatieren, daß mit $c = 12,4cm$, $a = 6,13cm$ und $\gamma = 112°$ der gegebene Winkel der größeren Seite gegenüberliegt ($c > a$!) und somit die Lösung eindeutig sein muß, während bei (iii) mit $b = 9,88m$, $c = 10.7m$ und $\beta = 65,5°$ der gegebene Winkel eben nicht der größeren Seite (hier c!) gegenüberliegt, die Lösung also zweideutig oder eindeutig sein kann oder auch gar nicht existieren muß.

4.2.

Die Aufgabe wird schrittweise gelöst. Zu bestimmen ist die Länge der Strecke $\overline{F_1F_2}$. Gegeben sind die folgenden Stücke: $|\overline{BB'}|$=63,2 m, $\alpha = 28,7°$ und $\beta = 43,9°$.

Bild 2 läßt sich ergänzen. β kommt ebenfalls im Dreieck $\triangle F_2B'B$ vor (Wechselwinkel!). α kommt noch im Dreieck $\triangle F_1B'B$ vor (Wechselwinkel!).



Im $\triangle F_2B'B$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\tan\beta &= \frac{|\overline{BB'}|}{|\overline{B'F_2}|} \\
\iff \quad |\overline{B'F_2}| &= \frac{|\overline{BB'}|}{\tan\beta} \\
\implies \quad |\overline{B'F_2}| &\approx 65,7m
\end{aligned}
$$

Im $\triangle F_1B'B$ gilt:

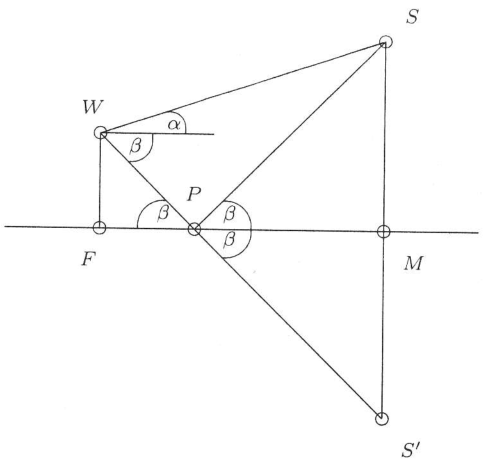
$$
\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{|\overline{BB'}|}{|\overline{B'F_1}|} \\
\iff \quad |\overline{B'F_1}| &= \frac{|\overline{BB'}|}{\tan\alpha} \\
\implies \quad |\overline{B'F_1}| &\approx 115,4m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\textit{Also} \quad |\overline{F_1F_2}| &= |\overline{F_1B'}| - |\overline{F_2B'}| \\
|\overline{F_1F_2}| &= 49,7m
\end{aligned}
$$

4.3.

Die Aufgabe wird schrittweise gelöst. Zu bestimmen ist die Länge der Strecke $\overline{MS}$. Gegeben sind die folgenden Stücke: $|\overline{FW}|$=120m, $\alpha = 36°$ und $\beta = 43°$.

Bild 1 läßt sich ergänzen. β kommt ebenfalls in den folgenden Dreiecken vor: Im Dreieck $\triangle FPW$ (Wechselwinkel!), im Dreieck $\triangle PSM$ (Scheitelwinkel!) und im Dreieck $\triangle PMS$ (Symmetrie!).



Im $\triangle FPW$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sin\beta &= \frac{|\overline{FW}|}{|\overline{PW}|} \\
\Longleftrightarrow \quad |\overline{PW}| &= \frac{|\overline{FW}|}{\sin\beta} \\
\Longrightarrow \quad |\overline{PW}| &\approx 176m
\end{aligned}$$

Im $\triangle PSW$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sphericalangle WPS &= 180° - 2\beta \\
&= 94° \\
\sphericalangle PSW &= 180° - (\alpha + \beta + \sphericalangle WPS) \\
&= 7°
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{|\overline{PS}|}{|\overline{PW}|} &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\sphericalangle PSW} \qquad (\mathit{Sinussatz}) \\
\Longleftrightarrow \quad |\overline{PS}| &= \frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot|\overline{PW}|}{\sin\sphericalangle PSW} \\
\Longrightarrow \quad |\overline{PS}| &\approx 1417m
\end{aligned}$$

Im $\triangle PMS$ gilt:

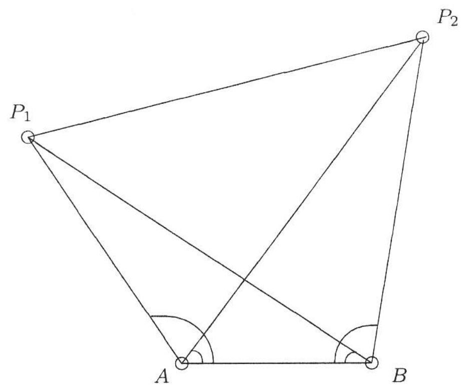
$$\begin{aligned}
\sin\beta &= \frac{|\overline{MS}|}{|\overline{PS}|} \\
|\overline{MS}| &= \sin\beta\cdot|\overline{PS}| \\
|\overline{MS}| &\approx 966m
\end{aligned}$$

Anmerkung zur Schreibweise $\sphericalangle WPS$:

In der Schreibweise $\sphericalangle WPS$ steht der mittlere Punkt (hier P) immer für den Scheitelpunkt des Winkels; die beiden anderen Buchstaben bezeichnen Punkte, die auf den Schenkeln des Winkels liegen (hier W und S).

4.4.

Die Aufgabe wird schrittweise gelöst. Zu bestimmen ist die Länge der Strecke $\overline{P_1P_2}$. Gegeben sind die folgenden Stücke: $|\overline{AB}|=55$ m, $\sphericalangle BAP_1 = 124,1°$, $\sphericalangle BAP_2 = 54,3°$, $\sphericalangle P_1BA = 33,9°$ und $\sphericalangle P_2BA = 95,2°$.



Im $\triangle ABP_2$ gilt:

$$\begin{aligned} \sphericalangle AP_2B &= 180° - \sphericalangle BAP_2 - \sphericalangle P_2BA \\ \sphericalangle AP_2B &= 30,5° \\ \frac{|\overline{AP_2}|}{|\overline{AB}|} &= \frac{\sin\sphericalangle P_2BA}{\sin\sphericalangle AP_2B} \qquad (\textit{Sinussatz}) \\ \Longleftrightarrow \quad |\overline{AP_2}| &= \frac{|\overline{AB}|\cdot\sin\sphericalangle P_2BA}{\sin\sphericalangle AP_2B} \\ \Longrightarrow \quad |\overline{AP_2}| &\approx 107,9m \end{aligned}$$

Im $\triangle ABP_1$ gilt:

$$\begin{aligned} \sphericalangle AP_1B &= 180° - \sphericalangle BAP_1 - \sphericalangle P_1BA \\ \sphericalangle AP_1B &= 22° \\ \frac{|\overline{AP_1}|}{|\overline{AB}|} &= \frac{\sin\sphericalangle P_1BA}{\sin\sphericalangle AP_1B} \qquad (\textit{Sinussatz}) \\ \Longleftrightarrow \quad |\overline{AP_1}| &= \frac{|\overline{AB}|\cdot\sin\sphericalangle P_1BA}{\sin\sphericalangle AP_1B} \\ \Longrightarrow \quad |\overline{AP_1}| &\approx 81,9m \end{aligned}$$

Im $\triangle AP_1P_2$ gilt:

$$\sphericalangle P_1AP_2 = \sphericalangle BAP_1 - \sphericalangle BAP_2$$

$$\sphericalangle P_1AP_2 = 69,8^\circ$$

$$|\overline{P_1P_2}|^2 = |\overline{AP_2}|^2 + |\overline{AP_1}|^2 - 2 \cdot |\overline{AP_2}| \cdot |\overline{AP_1}| \cdot \cos\sphericalangle P_1AP_2 \qquad (\textit{Kosinussatz})$$

$$\Longrightarrow |\overline{P_1P_2}| = \sqrt{|\overline{AP_2}|^2 + |\overline{AP_1}|^2 - 2 \cdot |\overline{AP_2}| \cdot |\overline{AP_1}| \cdot \cos\sphericalangle P_1AP_2} \qquad (\textit{Kosinussatz})$$

$$|\overline{P_1P_2}| \approx 111m$$

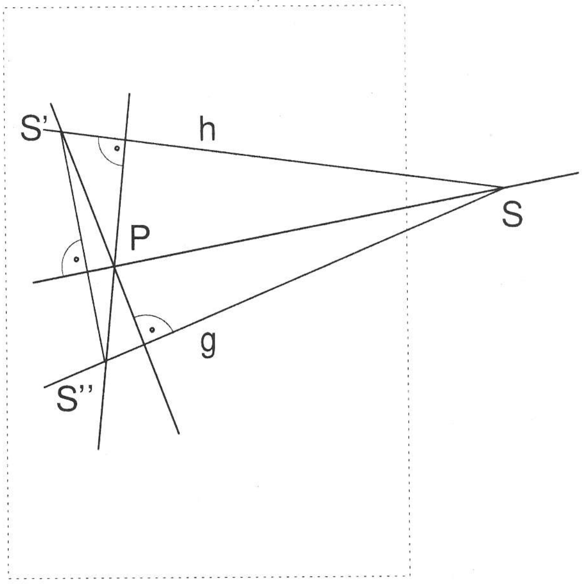
4.5.

1. Fall: Die Geraden g und h bilden einen Winkel, der nicht 90^0 beträgt.

Fall 1(a): P wird von den Geraden g und h „eingeschlossen“.

Überlegung: Wir konstruieren ein Dreieck, in dem der Punkt S einen Eckpunkt, der Punkt P den Höhenschnittpunkt und die Geraden g und h „freie“ Schenkel bilden. Über die Senkrechte von P auf g gelangen wir zu einer Höhe in diesem Dreieck und damit zu einem zweiten Eckpunkt; es ist der Schnittpunkt der genannten Senkrechten mit der Geraden h: S'. Die Senkrechte von P auf h liefert eine zweite Höhe in dem zu konstruierenden Dreieck und damit den dritten Eckpunkt; es ist der Schnittpunkt der genannten Senkrechten mit der Geraden g: S''. Die Senkrechte von P auf die Strecke $S'S''$ schneidet als Höhe im Dreieck $SS'S''$ den Punkt S.

Skizze:



Fall 1(b): P wird von den Geraden g und h nicht „eingeschlossen". Die Geraden g und h „zerlegen" das Blatt in drei Teilflächen. P liege in der Teilfläche, die die Gerade h mit den Blattbegrenzungen bildet. Der zweite (mögliche) Fall läßt sich analog behandeln.

Überlegung: Wir konstruieren ein Dreieck, in dem die Punkte S und P Eckpunkte, die Gerade g einen „freien" Schenkel und die Gerade h eine Höhengerade bilden. Über die Senkrechte von P auf g gelangen wir zum Schnittpunkt mit der Geraden h, der sich als Höhenschnittpunkt im zu konstruierenden Dreieck auffassen läßt: H. Die Senkrechte von P auf h liefert mit dem Schnittpunkt mit g den dritten Eckpunkt des zu bildenden Dreiecks: S'. Die Gerade durch die Punkte S' und H liefert die dritte Höhe im zu konstruierenden Dreieck. Die Senkrechte von P auf die Strecke HS' schneidet als dritte Seite im Dreieck SPS' den Punkt S.

2. Fall: Die Geraden g und h bilden einen Winkel, der 90^0 beträgt.

Fall 2(a): P wird von den Geraden g und h „eingeschlossen".

Überlegung: Wir konstruieren ein Rechteck, in dem die Punkte P und S gegenüberliegende Eckpunkte bilden. Die Geraden g und h bilden „freie" Schenkel. Über die Senkrechte von P auf g gelangen wir zu einem dritten Eckpunkt des zu konstruierenden Rechtecks: S'. Mit der Senkrechten von P auf h erhalten wir den vierten Eckpunkt (S'') des Rechtecks $PSS'S''$. Wir zeichnen die Diagonale SS' des betrachteten Rechtecks ein und bestimmen den Mittelpunkt der Strecke SS': M. Die Gerade durch S' und M schneidet als zweite Diagonale im Rechteck $PSS'S''$ den Punkt S.

Fall 2(b): P wird von den Geraden g und h nicht „eingeschlossen". Die Geraden g und h „zerlegen" das Blatt in drei Teilflächen. P liege in der Teilfläche, die die Gerade h mit den Blattbegrenzungen bildet. Der zweite (mögliche) Fall läßt sich analog behandeln.

Überlegung: Wir spiegeln den Punkt P an der Geraden h, erhalten den Bildpunkt P' und verfahren dann zunächst wie in Fall 2(a):

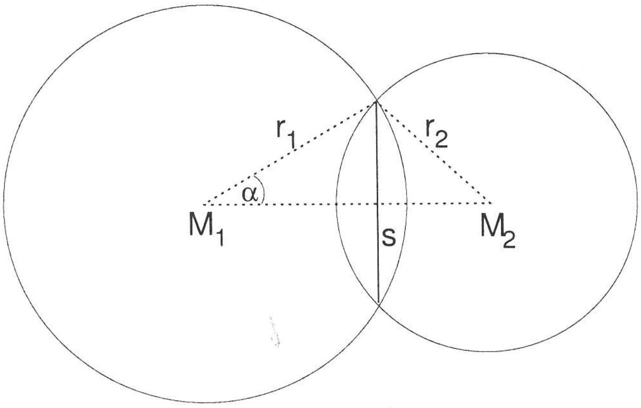
Wir konstruieren ein Rechteck, in dem die Punkte P' und S gegenüberliegende Eckpunkte bilden. Die Geraden g und h bilden „freie" Schenkel. Über die Senkrechte von P' auf g gelangen wir zu einem dritten Eckpunkt des zu konstruierenden Rechtecks: S'. Mit der Senkrechten von P' auf h erhalten wir den vierten Eckpunkt (S'') des Rechtecks $P'SS'S''$. Wir zeichnen die Diagonale $S'S''$ des betrachteten Rechtecks ein.
Nun verschieben wir die durch die Diagonale SS' festgelegte Gerade paralle durch Punkt P und erhalten somit die Gerade durch P und S.

4.6.

$$
\begin{aligned}
r_2{}^2 &= r_1{}^2 + |\overline{M_1M_2}|^2 - 2 \cdot r_1 \cdot |\overline{M_1M_2}| \cdot \cos\alpha \quad \textit{(Kosinussatz)} \\
\cos\alpha &= \frac{r_1{}^2 + |\overline{M_1M_2}|^2 - r_2{}^2}{2 \cdot r_1 \cdot |\overline{M_1M_2}|} \\
\cos\alpha &= \frac{16\text{cm}^2 + 36\text{cm}^2 - 9\text{cm}^2}{2 \cdot 4\text{cm} \cdot 6\text{cm}} \\
\cos\alpha &= \frac{43}{48} \\
\alpha &\approx 26,38^0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{\frac{s}{2}}{r_1} \\
s &= 2 \cdot r_1 \cdot \sin\alpha \\
s &= 2 \cdot 4\text{cm} \cdot \sin\alpha \\
s &= 8\text{cm} \cdot \sin\alpha \\
s &\approx 3,56 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

Skizze:



4.7.

$$A = \frac{c \cdot h_c}{2} \qquad \text{(Flächeninhalt eines Dreiecks)}$$

$$\text{(mit } \sin\alpha = \frac{h_c}{b} \text{)}$$

$$A = \frac{c \cdot b \cdot \sin\alpha}{2} \qquad (\ h_c = \sin\alpha \cdot b\ )$$

$$\text{(nach einem Winkelsatz gilt: } \gamma = \gamma\ '\ )$$

$$\text{(es gilt: } \sin\gamma = \sin\gamma\ ' = \frac{c}{2r}\ )$$

$$\text{(also: } c = 2r \cdot \sin\gamma\ )$$

$$A = \frac{2r \cdot \sin\gamma \cdot b \cdot \sin\alpha}{2}$$

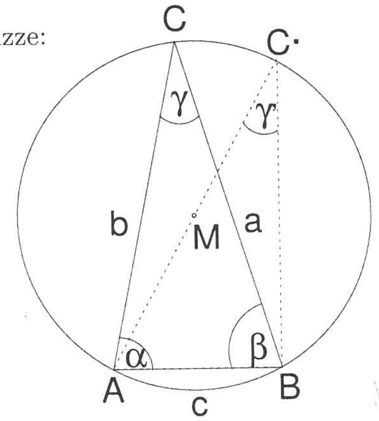
$$A = r \cdot \sin\gamma \cdot b \cdot \sin\alpha$$

$$\text{(analog gilt: } \sin\beta = \frac{b}{2r}\ )$$

$$\text{(also: } b = 2r \cdot \sin\beta\ )$$

$$A = 2r^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma$$

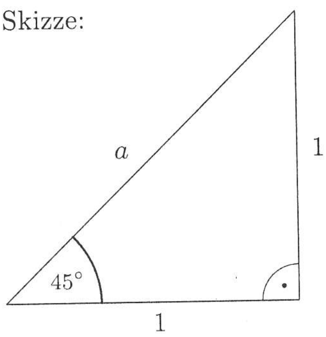
Skizze:



4.8. (i) $\sin\frac{\pi}{4} = \sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Wir betrachten ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck:

Skizze:



Überlegung:

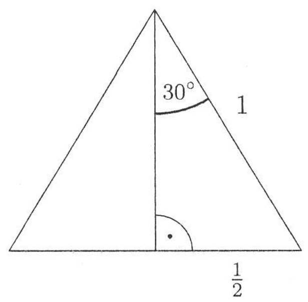
$$a^2 = 1^2 + 1^2$$
$$a = \sqrt{2}$$

$$\sin 45° = \frac{1}{a}$$
$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

(ii) $\sin\frac{\pi}{6} = \sin 30° = \frac{1}{2}$

Wir betrachten ein gleichseitiges Dreieck:

Skizze:



Überlegung:

$$\sin 30° = \frac{\frac{1}{2}}{1}$$

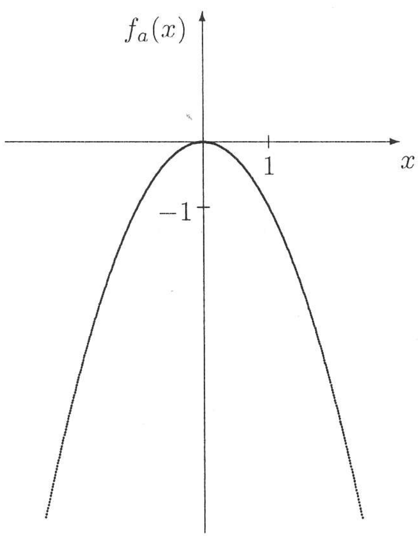
$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

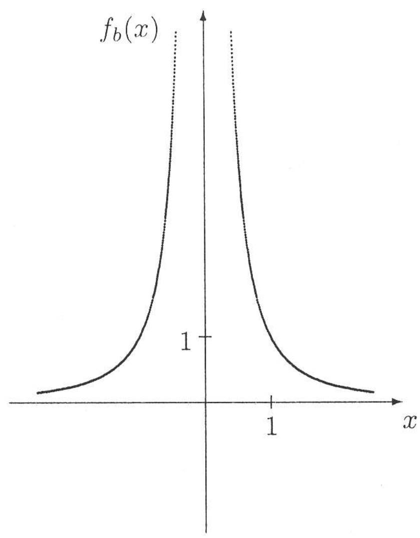
5 Elementare Funktionen

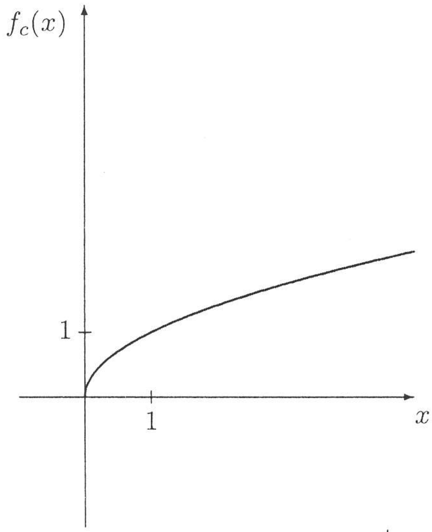
5.1. Die Graphen:

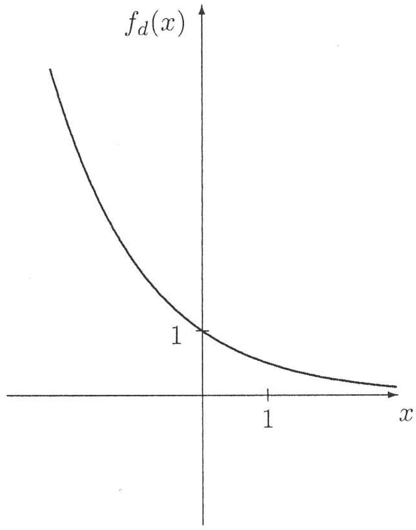
G_{f_a}, G_{f_b}, G_{f_c}, G_{f_d}, G_{f_e} von:

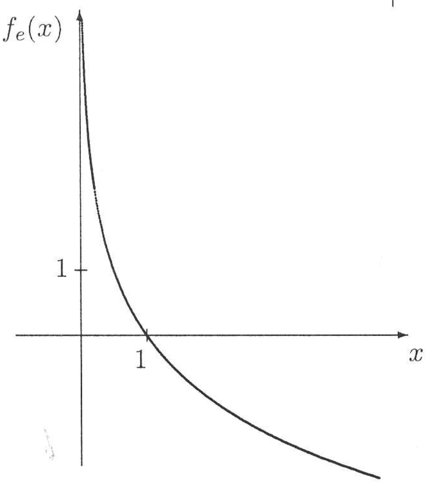
$f_a(x) = -x^2$, $f_b(x) = \frac{1}{x^2}$, $f_c(x) = \sqrt{x}$, $f_d(x) = (\frac{1}{2})^x$, $f_e(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$









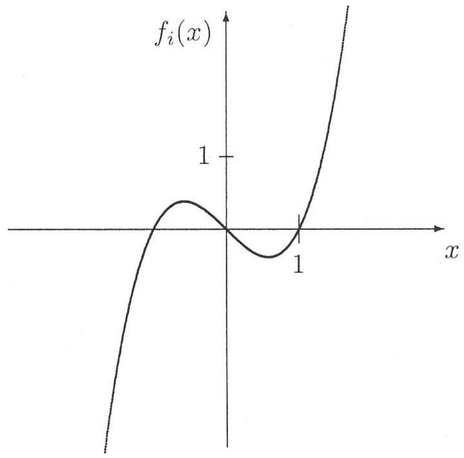


5.2. Die Graphen der Funktionen

$$\left.\begin{array}{l} G_{f_1} \\ G_{f_2} \\ G_{f_3} \\ G_{f_4} \\ G_{f_5} \\ G_{f_6} \\ G_{f_7} \end{array}\right\} \text{ befinden sich in der } \left\{\begin{array}{l} 3.\ \textit{Zeile (rechts)} \\ 2.\ \textit{Zeile (links)} \\ 3.\ \textit{Zeile (links)} \\ 1.\ \textit{Zeile} \\ 2.\ \textit{Zeile (mitte)} \\ 3.\ \textit{Zeile (mitte)} \\ 2.\ \textit{Zeile (rechts)} \end{array}\right.$$

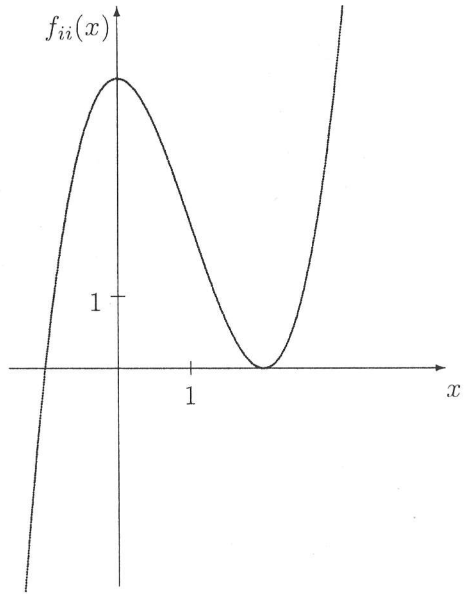
5.3. (i) $D_f = \mathbb{R}$, die Nullstellen sind bei $x_{01} = 0$, $x_{02} = -1$, $x_{03} = 1$.

Graph „G_f" von $f(x) = x^3 - x$:



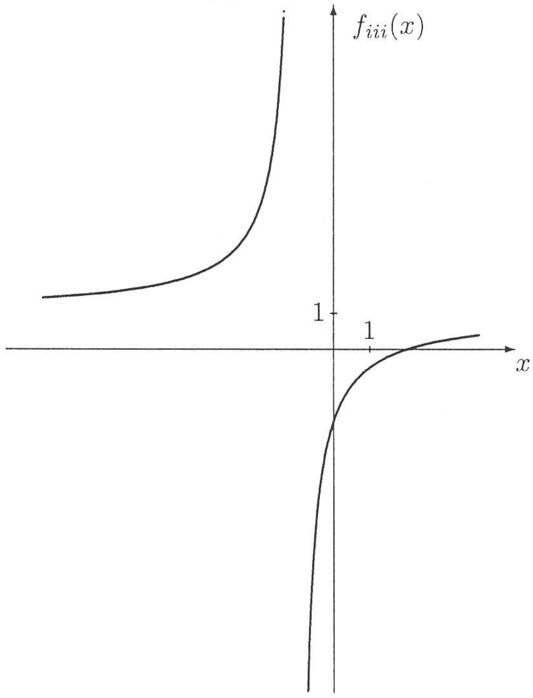
(ii) $D_f = \mathbb{R}$, die Nullstellen sind bei $x_{01} = -1$, $x_{02} = 2$.

Graph „G_f" von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$:



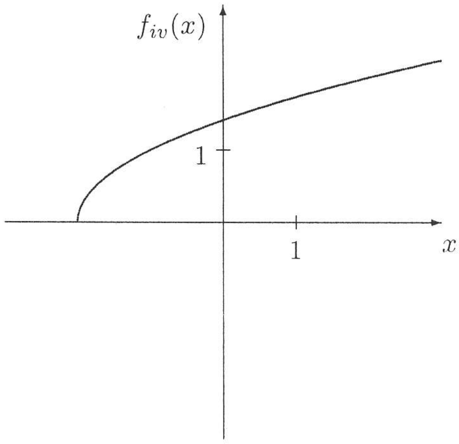
(iii) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, die Nullstelle ist bei $x_0 = 2$.

Graph „G_f“ von $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$:



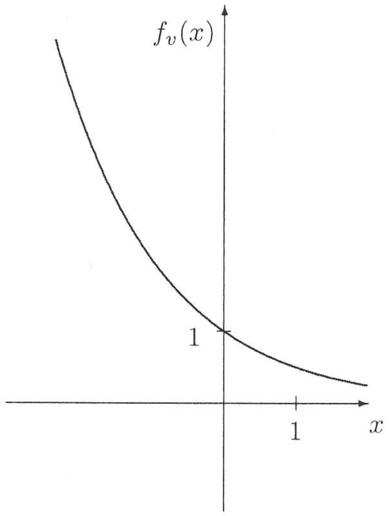
(iv) $D_f = [-2, +\infty[$, die Nullstelle ist bei $x_0 = -2$

Graph „G_f“ von $f(x) = \sqrt{x+2}$:



(v) $D_f = \mathbb{R}$, keine Nullstellen.

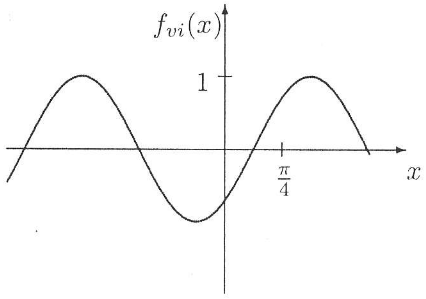
Graph „G_f" von $f(x) = (\frac{1}{2})^x$:



(vi) $D_f = \mathbb{R}$, die Menge der Nullstellen ist:

$$\{\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} .$$

Graph „G_f" von $f(x) = \sin\ (2 \cdot x - \frac{\pi}{4}) = \sin\big(2 \cdot (x - \frac{\pi}{8})\big)$:



6 Vektoren und lineare Gleichungssysteme

6.1. (i) $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

(iii) $\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(iv) $(-\frac{1}{2})\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(v) $|\vec{b}|=6$

(vi) $\frac{1}{2}\cdot\vec{b}\bullet\vec{a}=-9$

(vii) $\vec{b}\bullet\vec{c}$ — nicht definiert

(viii) $|\vec{d}|\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix} -20 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix}$

(ix) $|\vec{c}|\cdot|\vec{b}|=30$

(x) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(xi) $\vec{c}\times\vec{d}$ — nicht definiert

(xii) $\vec{a}\times(\vec{e_1}+2\cdot\vec{e_2}+3\cdot\vec{e_3})=\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$

6.2. (i) $\alpha\approx 54,74^0$

(ii) $\alpha=120^0$

(iii) $\alpha=90^0$

6.3. (i) Wenn wir „das Vektorprodukt in der Komponentendarstellung“ (Lehrtext Teil B, Seite 39)

für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ und $\vec{-b}=\begin{pmatrix} -b_x \\ -b_y \\ -b_z \end{pmatrix}$ bilden,

erhalten wir:

$$\vec{-b}\times\vec{a} = \begin{pmatrix} -b_x \\ -b_y \\ -b_z \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} (-b_y) \cdot a_z - (-b_z) \cdot a_y \\ (-b_z) \cdot a_x - (-b_x) \cdot a_z \\ (-b_x) \cdot a_y - (-b_y) \cdot a_x \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b}$$

(ii) Wir setzen in die Gleichung

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \qquad \text{(Lehrtext Teil B, Seite 34)}$$

für $\vec{b}$ $\quad 2 \cdot \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ ein

und erhalten:

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \bullet (2 \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix})}{|\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}| \cdot |2\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2a_x \\ 2a_y \\ 2a_z \end{pmatrix}}{|\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}| \cdot |\begin{pmatrix} 2a_x \\ 2a_y \\ 2a_z \end{pmatrix}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{2a_x^2 + 2a_y^2 + 2a_z^2}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{4a_x^2 + 4a_y^2 + 4a_z^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{2(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)}{2\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

$$\cos\alpha = 1$$

$$\alpha = 0^0$$

6.4. (i) Die Lösung ist $x = -2, \quad y = 1$.

(ii) Das Gleichungssystem hat keine eindeutige Lösung. Unendlich viele reelle Werte für x und y erfüllen die beiden Gleichungen.

(iii) Das Gleichungssystem ist unlösbar.

(iv) Die Lösung ist $x = 1, \quad y = 3, \quad z = 1$.

(v) Die Lösung ist $x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 2$.

(vi)

Mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens errechnet sich die Lösung wie folgt:

(1)	x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$	$-x_5$	$=$	-1
(2)	x_1	$+x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$+x_5$	$=$	1
(3)	x_1	$-x_2$	$+x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$=$	5
(4)	$-x_1$	$+x_2$	$-x_3$	$+x_4$	$-x_5$	$=$	-7
(5)	x_1	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$=$	1

(I. Schritt)

Die „erste Stufe" der gewünschten „Treppenform" ist bereits gegeben.

(II. Schritt)

(1)'	x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$	$-x_5$	$=$	-1
(2)'			$-2x_3$	$-2x_4$	$+2x_5$	$=$	2
(3)'		$-2x_2$		$-2x_4$		$=$	6
(4)'		$2x_2$		$+2x_4$	$-2x_5$	$=$	-8
(5)'		$-2x_2$	$-2x_3$	$-2x_4$		$=$	2

In diesem Schritt wird erreicht, daß die Variable x_1 nur noch in der 1. Gleichung vorkommt; in allen darunterstehenden Gleichungen ist x_1 also zu eliminieren.

„Nebenrechnung":

Zur 2. Zeile: (2) + (−(1))

$$\begin{array}{rrcl} & x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 & = & 1 \\ & -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 & = & 1 \\ \hline (2)' & -2x_3 - 2x_4 + 2x_5 & = & 2 \end{array}$$

Zur 3. Zeile: (3) + (−(1))

$$\begin{array}{rrcl} & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 & = & 5 \\ & -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 & = & 1 \\ \hline (3)' & -2x_2 \quad - 2x_4 & = & 6 \end{array}$$

Zur 4. Zeile: (4) + (1)

$$\begin{array}{rrcl} & -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 & = & -7 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 & = & -1 \\ \hline (4)' & 2x_2 \quad + 2x_4 - 2x_5 & = & -8 \end{array}$$

Zur 5. Zeile: (5) + (−(1))

$$\begin{array}{rrcl} & x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 & = & 1 \\ & -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 & = & 1 \\ \hline (5)' & -2x_2 - 2x_3 - 2x_4 & = & 2 \end{array}$$

$$
\begin{array}{l|cccccccc|}
\hline
(1)^{ii} & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & = & -1 \\
\cline{2-8}
(2)^{ii} & & -2x_2 & & -2x_4 & & = & 6 \\
(3)^{ii} & & & -2x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = & 2 \\
(4)^{ii} & & 2x_2 & & +2x_4 & -2x_5 & = & -8 \\
(5)^{ii} & & -2x_2 & -2x_3 & -2x_4 & & = & 2 \\
\hline
\end{array}
$$

(I. Schritt)

Die „zweite Stufe" der gewünschten „Treppenform" läßt sich wie folgt erreichen.

„Nebenrechnung":

Zur 2., 3. Zeile: $(2)' \leftrightarrow (3)'$

(2. und 3. Zeile vertauschen!)

$$
\begin{array}{l|cccccccc|}
\hline
(1)^{iii} & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & = & -1 \\
\cline{2-8}
(2)^{iii} & & x_2 & & +x_4 & & = & -3 \\
\cline{3-8}
(3)^{iii} & & & -2x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = & 2 \\
(4)^{iii} & & 2x_2 & & +2x_4 & -2x_5 & = & -8 \\
(5)^{iii} & & -2x_2 & -2x_3 & -2x_4 & & = & 2 \\
\hline
\end{array}
$$

„Nebenrechnung":

Zur 2. Zeile: $(2)^{ii} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$$(2)^{iii} \quad x_2 \quad +x_4 \quad = \quad -3$$

(II. Schritt)

Ziel ist es, daß die Variable x_2 nur noch in der 1. und in der 2. Gleichung auftritt; in allen darunterstehenden Gleichungen soll x_2 „verschwinden".

$$
\begin{array}{l|cccccccc|}
\hline
(1)^{iv} & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & = & -1 \\
\cline{2-8}
(2)^{iv} & & x_2 & & +x_4 & & = & -3 \\
\cline{3-8}
(3)^{iv} & & & -2x_3 & -2x_4 & +2x_5 & = & 2 \\
(4)^{iv} & & & & & -2x_5 & = & -2 \\
(5)^{iv} & & & -2x_3 & & & = & -4 \\
\hline
\end{array}
$$

„Nebenrechnung":

Zur 4. Zeile: $(4)^{iii} + (-2(2)^{iii})$

$$
\begin{array}{lcccc}
 & 2x_2 + 2x_4 & -2x_5 & = & -8 \\
 & -2x_2 - 2x_4 & & = & 6 \\
\cline{2-5}
(4)^{iv} & & -2x_5 & = & -2
\end{array}
$$

Zur 5. Zeile: $(5)^{iii} + (2(2)^{iii})$

$$
\begin{array}{lcccccc}
 & -2x_2 & -2x_3 & -2x_4 & = & 2 \\
 & 2x_2 & & +2x_4 & = & -6 \\
\cline{2-6}
(5)^{iv} & & -2x_3 & & = & -4
\end{array}
$$

(I. Schritt)

Die „dritte Stufe“ der gewünschten „Treppenform“ erhalten wir folgendermaßen.

$(1)^v$	x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$	$-x_5$	$=$	-1
$(2)^v$		x_2		$+x_4$		$=$	-3
$(3)^v$			x_3	$+x_4$	$-x_5$	$=$	-1
$(4)^v$					$-2x_5$	$=$	-2
$(5)^v$			$-2x_3$			$=$	-4

„Nebenrechnung“:

Zur 3. Zeile: $(3)^{iv} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$$(3)^v \quad x_3 + x_4 - x_5 \;=\; -1$$

(II. Schritt)

Mit dieser Umformung erzielen wir, daß die Variable x_3 nur noch in der 1., 2. und 3. Gleichung vorkommt; in den darunter folgenden Gleichungen ist x_3 eliminiert.

$(1)^{vi}$	x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$	$-x_5$	$=$	-1
$(2)^{vi}$		x_2		$+x_4$		$=$	-3
$(3)^{vi}$			x_3	$+x_4$	$-x_5$	$=$	-1
$(4)^{vi}$					$-2x_5$	$=$	-2
$(5)^{vi}$				$2x_4$	$-2x_5$	$=$	-6

„Nebenrechnung“:

Zur 5. Zeile: $(5)^v + (2 \cdot (3)^v)$

$$\begin{array}{lrrrcr} & -2x_3 & & & = & -4 \\ & 2x_3 & +2x_4 & -\,2x_5 & = & -2 \\ \cline{2-6} (4)^{vi} & & 2x_4 & -\,2x_5 & = & -6 \end{array}$$

(I. Schritt)

Die „vierte Stufe“ der „Treppe“ ergibt sich auf folgende Weise.

$(1)^{vii}$	x_1	$+x_2$	$+x_3$	$+x_4$	$-x_5$	$=$	-1
$(2)^{vii}$		x_2		$+x_4$		$=$	-3
$(3)^{vii}$			x_3	$+x_4$	$-x_5$	$=$	-1
$(4)^{vii}$				$2x_4$	$-2x_5$	$=$	-6
$(5)^{vii}$					$-2x_5$	$=$	-2

„Nebenrechnung“:

Zur 4., 5. Zeile: $(4)^{vi} \leftrightarrow (5)^{vi}$

$$\begin{array}{lrrcr} (4)^{vii} & 2x_4 & -\,2x_5 & = & -6 \\ (5)^{vii} & & -2x_5 & = & -2 \end{array}$$

$$
\begin{array}{l|cccccc|}
\hline
(1)^{viii} & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & = & -1 \\
\hline
(2)^{viii} & & x_2 & & +x_4 & & = & -3 \\
(3)^{viii} & & & x_3 & +x_4 & -x_5 & = & -1 \\
(4)^{viii} & & & & x_4 & -x_5 & = & -3 \\
(5)^{viii} & & & & & -2x_5 & = & -2 \\
\hline
\end{array}
$$

„Nebenrechnung“:

Zur 4. Zeile: $(4)^{vii} \cdot \frac{1}{2}$

$(4)^{viii} \quad x_4 - x_5 = -3$

(I. Schritt)

In der 5. Gleichung kommt die Variable x_4 nicht vor, so daß die „letzte Stufe“ der „Treppe“ leicht erreicht wird.

$$
\begin{array}{|cccccccc|}
\hline
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & = & -1 \\
\hline
& x_2 & & +x_4 & & = & -3 \\
& & x_3 & +x_4 & -x_5 & = & -1 \\
& & & x_4 & -x_5 & = & -3 \\
& & & & x_5 & = & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

„Nebenrechnung“:

Zur 5. Zeile: $(5)^{viii} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$(5)^{ix} \quad x_5 = 1$

Die Lösung läßt sich jetzt ablesen:

$$
\begin{aligned}
x_5 &= 1 \\
x_4 &= -2 \\
x_3 &= 2 \\
x_2 &= -1 \\
x_1 &= 1\,.
\end{aligned}
$$

7 Differentialrechnung

7.1.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{x-(x+\Delta x)}{x\cdot(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x-(x+\Delta x)}{\Delta x\cdot x\cdot(x+\Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x\cdot(x+\Delta x)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x\cdot(x+\Delta x)} \qquad (\Delta x\neq 0)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{-1}{x\cdot(x+0)}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

7.2.

(a) $$f_a'(x) = 4\cdot x\cdot\sin x + 2\cdot x^2\cdot\cos x$$

$$= 2\cdot x\cdot(2\cdot\sin x + x\cdot\cos x) \quad \text{(Produktregel)}$$

(b) $$f_b'(x) = \frac{9\cdot x^2\cdot\ln x - 3\cdot x^2}{(\ln x)^2}$$

$$= \frac{3\cdot x^2\cdot(3\cdot\ln x - 1)}{(\ln x)^2} \quad \text{(Quotientenregel)}$$

(c) $f_c'(x) = -\dfrac{\sin x}{(\cos(\cos x))^2}$ (Kettenregel)

(d) $f_d'(x) = 14 \cdot \dfrac{2 + 3 \cdot x}{(1 - 2 \cdot x)^3}$ (Kettenregel, Quotientenregel)

(e) $f_e'(x) = (-12) \cdot x \cdot (2 \cdot x^2 + 3)^2 \cdot \sin((2 \cdot x^2 + 3)^3)$ (Kettenregel, Kettenregel)

(f) $f_f'(x) = e \cdot e^x + 1$ (Summenregel, konstanter Faktor)

7.3. (a) $D_g = \mathbb{R}$
$D_f = \mathbb{R}$

(b) Die Funktion g schneidet die x-Achse bei $x_{0_1} = -1$ und bei $x_{0_2} = 1$.

Die Nullstellen sind also $x_{01} = -1$ und $x_{02} = 1$.

Die Funktion f hat unendlich viele Nullstellen
bei $x_0 \in \{\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(c) Die Funktion g hat ein Minimum bei $x_e = \frac{1}{2}$.

Der Extrempunkt hat die Koordinaten $(\frac{1}{2}\ ,\ -\frac{27}{32})$.

Die Funktion f hat unendlich viele Extremstellen
bei $x_e \in \{-\frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Die Minima sind bei $x_{\text{min}} \in \{-\frac{\pi}{8} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

die Maxima bei $x_{\text{max}} \in \{\frac{3}{8}\pi + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(d) Die Funktion g besitzt zwei Wendestellen bei $x_{w_1} = 0$ und

bei $x_{w_2} = -1$; die Koordinaten der Wendepunkte lauten $(0, \ -\frac{1}{2})$ und $(-1, \ 0)$.

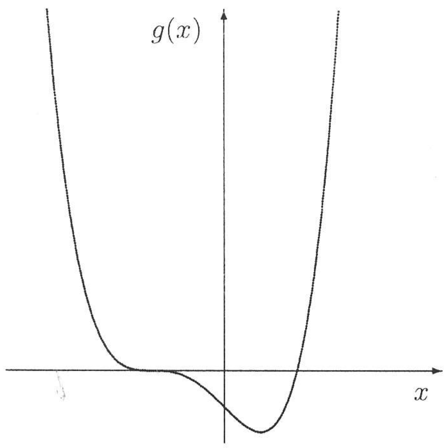
Die Funktion f hat unendlich viele Wendestellen; sie sind gerade die Nullstellen von f.

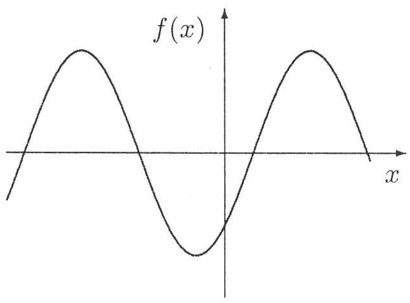
(e) Die Graphen von

$g(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 - x - \frac{1}{2}$

und

$f(x) = \sin 2x - \cos 2x$ sind:





7.4. Nachstehend sind die Graphen von

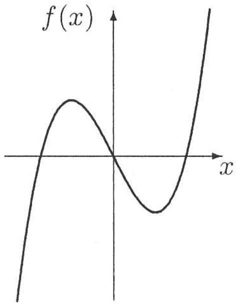
f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x$,

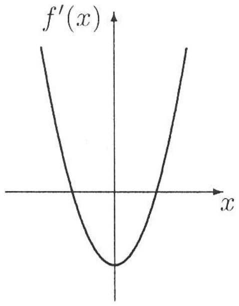
f' mit $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2$,

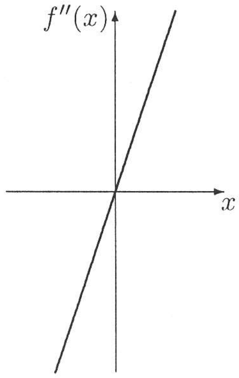
f'' mit $f''(x) = 3x$

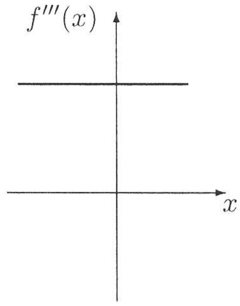
und f''' mit $f'''(x) = 3$

abgebildet.









7.5. (a) Die Grundfläche der Dose hat einen Durchmesser von

$$2 \cdot \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \text{ cm} \approx 10,8385 \text{ cm},$$

und die Höhe der Dose beträgt

$$\frac{100}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{250}{\pi^2}}} \text{ cm} \approx 10,8385 \text{ cm}.$$

(b) Die Einschnitte müssen $\frac{1}{6}$ mal so lang sein wie die Seitenlänge der quadratischen Pappe.

8 Integralrechnung

8.1. (a) $\displaystyle\int_{-2}^{2} |t^2 - 1| dt = 4$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} (\sin t + 3t^4) \, dt = 2 + \frac{3}{5} \cdot \pi^5$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{2} (5 \cdot e^t + \frac{2}{t}) \, dt = 5 \cdot e^2 + 2 \cdot \ln 2 - 5 \cdot e$

8.2. $$\int_{-2}^{0} f(x) \, dx + |\int_{0}^{2} f(x) \, dx| = 2 \cdot |\int_{0}^{2} f(x) \, dx| = 4$$

In diesem Zusammenhang läßt sich der berechnete Wert des bestimmten Integrals wie folgt interpretieren:

Der Graph der Funktion f mit der Zuordnungsvorschrift $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^3 - 2 \cdot x$ schließt mit der x-Achse eine Fläche von 4 cm^2 ein, wenn wir in der graphischen Darstellung von f als Längeneinheit 1 Zentimeter wählen.

Da der Graph von f mit der in Aufgabe 4 dargestellten Funktion übereinstimmt, können Sie diese Interpretation auch von der Anschauung her bestätigen.

8.3. (a) $\int dx = x + c$

(b) $\int du = u + c$

(c) $\int \frac{dx}{x} = \ln\ |x| + c$

(d) $\int \sin^2 \alpha\ dx + \int \sin^2 \alpha\ dx = 2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot x + c$

(e) $\int \sin(2x)\ dx = -\frac{1}{2} \cdot \cos(2x) + c$

(f) $\int t^3 \ln t\ dt = \frac{1}{4} \cdot t^4 \cdot \ln t - \frac{1}{16} t^4 + c$

(g) $\int \tan x\ dx = -\ln|\cos x| + c$

(h) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\ dx = e^{\sqrt{x}} + c$

(i) $\int e^{\sqrt{x}}\ dx = ?$

Um $\int e^{\sqrt{x}}\ dx$ zu berechnen, substituieren wir $\sqrt{x}$ durch z:

$z = \sqrt{x}$.

Dann fassen wir z als Funktion von x auf mit $D_z = \mathbb{R}^+$:

$z(x) = \sqrt{x}$.

Nun berechnen wir die erste Ableitung von z:

$z'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$

Wir erhalten damit:

$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}\ e^{\sqrt{x}} \cdot 2 \cdot \sqrt{x} \right)\ dx$

$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int\ e^z \cdot 2 \cdot \sqrt{x}\ dz$

(nach Anwendung der Substitutionsregel)

$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int (e^z \cdot 2 \cdot z)\ dz$

(nach Ersetzen von $\sqrt{x}$ durch z)

$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int (z \cdot e^z)\ dz$

Nach Anwendung der partiellen Integration ergibt sich:

$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \cdot e^z (z - 1) + c$

Zum Schluß ersetzen wir z wieder durch $\sqrt{x}$:

$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2 \cdot e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + c.$

9 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

9.1.

$$
\begin{aligned}
& & 2x^2 - 4x + 18 &= 0 \\
&\Leftrightarrow & x^2 - 2x + 9 &= 0 \\
&\Leftrightarrow & x^2 - 2x + 1 + 8 &= 0 \\
&\Leftrightarrow & (x-1)^2 &= -8 \\
&\Rightarrow & x - 1 = \sqrt{-8} \quad &\text{oder} \quad x - 1 = -\sqrt{-8} \\
&\Leftrightarrow & x - 1 = 2\sqrt{-2} \quad &\text{oder} \quad x - 1 = -2\sqrt{-2} \\
&\Leftrightarrow & x = 1 + 2\sqrt{2}\sqrt{-1} \quad &\text{oder} \quad x = 1 - 2\sqrt{2}\sqrt{-1}
\end{aligned}
$$

9.2. (a)

z_k	(a_k, b_k)
$z_1 = 3 + 3j$	$(3, 3)$
$z_2 = -1 - j$	$(-1, -1)$
$z_3 = 0 + 0j$	$(0, 0)$

(b)

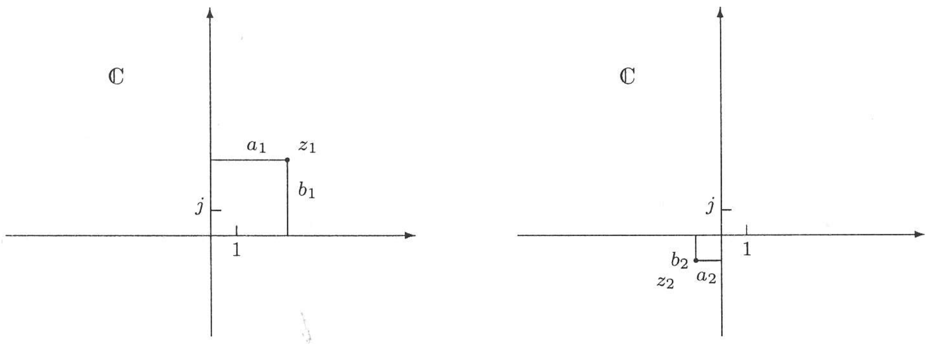


Abb.L.1 Veranschaulichung der komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 3j$ und $z_2 = -1 - 1j$ in der komplexen Zeichenebene

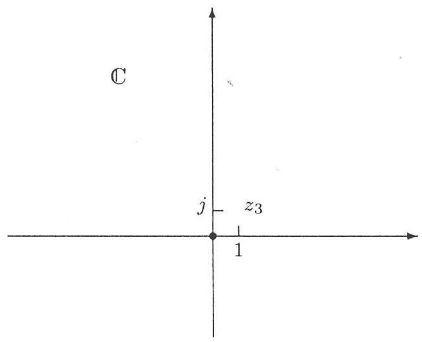


Abb.L.2 Veranschaulichung der (komplexen) Zahl $z_3 = 0 + 0j$ in der komplexen Zeichenebene

9.3.

	$a + bj$	(a, b)
$z_1 + z_2$	$= (3 + 3j) + (-1 - 1j)$	
	$= 2 + 2j$	$(2, 2)$
$z_1 + z_3$	$= (3 + 3j) + (0 + 0j)$	
	$= 3 + 3j$	$(3, 3)$
$z_1 \cdot z_2$	$= (3 + 3j) \cdot (-1 - 1j)$	
	$= (-3 + 3) + (-3 - 3)j$	
	$= -6j$	$(0, -6)$
$z_2 \cdot z_3$	$= 0 + 0j$	$(0, 0)$

9.4. Sei $z = a + bj$.

(a) Es gilt: $\overline{\overline{z}} = a - (-bj) = a + bj = z$. Offensichtlich ist $\overline{\overline{z}}$ eine komplexe Zahl.

(b) Das mit $\overline{\overline{z}}$ identifizierte Paar ist (a, b).

(c) $\overline{z_1} = 3 - 3j$
$\overline{z_2} = -1 + j$
$\overline{z_3} = 0 - 0j = 0 = z_3$

(d) Seien $v, w, z \in \mathrm{C}$. Dann gibt es reelle Zahlen $a_v, a_w, a_z, b_v, b_w, b_z$ so dass gilt: $v = a_v + b_v j, w = a_w + b_w j, z = a_z + b_z j$. Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
&\overline{v \cdot (w + z)} \\
&= \overline{(a_v + b_v j) \cdot ((a_w + a_z) + (b_w + b_z)j)} \\
&= \overline{(a_v(a_w + a_z) - (b_v(b_w + b_z)) + ((a_w + a_z)b_v + (b_w + b_z)a_v)j} \\
&= (a_v(a_w + a_z) - (b_v(b_w + b_z)) - ((a_w + a_z)b_v + (b_w + b_z)a_v)j \\
&= (a_v a_w + a_v a_z) - (b_v b_w + b_v b_z)) - (a_w b_v + a_z b_v + b_w a_v + b_z a_v)j \\
&= ((a_v a_w - b_v b_w) - (a_w b_v + a_v b_w)j) + ((a_v a_z - b_v b_z) - (a_z b_v + a_v b_z)j) \\
&= \overline{((a_v a_w - b_v b_w) + (a_w b_v + a_v b_w)j)} + \overline{((a_v a_z - b_v b_z) + (a_z b_v + a_v b_z)j)} \\
&= \overline{v \cdot w} + \overline{v \cdot z}
\end{aligned}
$$

(e)

$$
\begin{array}{lrcl}
 & z & = & -\overline{z} \\
\Leftrightarrow & a + bj & = & -(a - bj) \\
\Leftrightarrow & a + bj & = & -a + bj \\
\Rightarrow & a & = & 0 \\
\Rightarrow & z & = & bj,\ b \in \mathbb{R}
\end{array}
$$

9.5. $|z_1| = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$
$|z_2| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
$|z_3| = \sqrt{0} = 0$

9.6. Es gilt: $|z| = \sqrt{2}$, $\sin \phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \phi = 45°$.
Daraus folgt:

$$z = 1 + j = \sqrt{2} \cos 45° + j\,\sqrt{2} \sin 45°.$$